

113 學年度學科能力測驗數學 B 考科 非選擇題滿分參考答案與評分原則

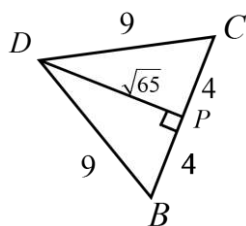
113 學科能力測驗數學 B 考科的非選擇題共有 2 題，其中第 19 題為 4 分；第 20 題為 8 分，總計 12 分。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考，詳細評分原則說明與部分學生作答情形，請參閱本中心將於 4 月 15 日出刊的第 342 期《選才電子報》。

113 學年度學科能力測驗數學 B 考科非選擇題各題的參考答案說明如下：

第 19 題

一、滿分參考答案：



策略一：利用 $\triangle BCD$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{DP}$ 。

【法一】

設 P 為 $\overline{BC}$ 的中點。因為 $\overline{DP} = \sqrt{9^2 - 4^2} = \sqrt{65}$ ，

得 $\triangle BCD$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times 8 \times \sqrt{65} = 4\sqrt{65}$ 。

策略二：利用三角形面積 $= \frac{1}{2} ab \sin C$ 。

【法二】

因為 $\sin \angle DBC = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{9}$ ，得 $\triangle BCD$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times 9 \times 8 \times \frac{\sqrt{65}}{9} = 4\sqrt{65}$ 。

【法三】

因為 $\cos \angle BDC = \frac{9^2 + 9^2 - 8^2}{2 \times 9 \times 9} = \frac{49}{81}$ ，得 $\sin \angle BDC = \sqrt{1 - \left(\frac{49}{81}\right)^2} = \frac{8\sqrt{65}}{81}$ 。

因此 $\triangle BCD$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times 9 \times 9 \times \frac{8\sqrt{65}}{81} = 4\sqrt{65}$ 。

策略三：利用三角形面積 $= \sqrt{s \times (s-a) \times (s-b) \times (s-c)}$ 。

【法四】

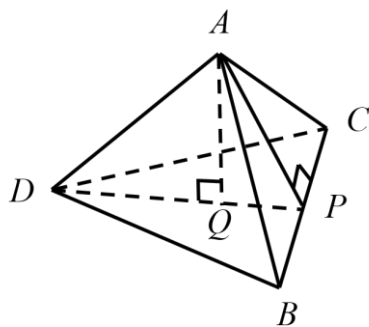
令 $s = \frac{9+9+8}{2} = 13$ ，得 $\triangle BCD$ 的面積 $= \sqrt{13 \times (13-9) \times (13-9) \times (13-8)} = 4\sqrt{65}$ 。

二、評分原則：

1. 可採策略一，利用 $\triangle BCD$ 的底邊及推得其對應的高，求出 $\triangle BCD$ 的面積，且有正確的解題過程。
2. 可採策略二，利用 $\triangle BCD$ 的任意兩邊長及推得該兩邊長夾角的正弦值，求出 $\triangle BCD$ 的面積，且有正確的解題過程。
3. 可採策略三，利用 $\triangle BCD$ 的三邊長及面積公式，求出 $\triangle BCD$ 的面積，且有正確的解題過程。

第 20 題

一、滿分參考答案：



※求 $\overline{AD}$ 的長度：

設 P 為 $\overline{BC}$ 的中點，由 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 且 $\overline{DP} \perp \overline{BC}$ ，得 $\overline{AP} \perp \overline{BC}$ ，故 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。

由題意知 $\angle BAC$ 為直角，所以 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，得 $\overline{AB} = \overline{AC} = 4\sqrt{2}$ 。

故 $\overline{AD} = \sqrt{9^2 - (4\sqrt{2})^2} = 7$ 。

(亦可設 $\overline{AD} = x$ 、 $\overline{AB} = y$ 、 $\overline{AC} = z$ ，由畢氏定理得
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9^2 \\ x^2 + z^2 = 9^2 \\ y^2 + z^2 = 8^2 \end{cases}$$

推得 $y = z = 4\sqrt{2}$ ，故 $\overline{AD} = x = \sqrt{9^2 - (4\sqrt{2})^2} = 7$ 。

※求四面體 $ABCD$ 的體積：

四面體 $ABCD$ 的體積 $= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times 7 \right) = \frac{112}{3}$ 。

※求頂點 A 到底面 $\triangle BCD$ 高度的方法：

《以下列出三種求出頂點 A 到底面 $\triangle BCD$ 高度的方法》

【法一】利用四面體 $ABCD$ 的體積

頂點 A 到底面 $\triangle BCD$ 的高度 $= \frac{\frac{112}{3}}{\frac{1}{3} \times 4\sqrt{65}} = \frac{28}{\sqrt{65}} = \frac{28}{65} \sqrt{65}$ 。

【法二】利用 $\triangle APD$ 面積

設頂點 A 在平面 BCD 的投影點為 Q 。因為 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 且 $\overline{DP} \perp \overline{BC}$ ，

故 Q 必定落在 $\overline{DP}$ 。又 $\overline{DP} = \sqrt{65}$ ， $\overline{AP} = 4$ ， $\overline{AD} = 7$ ，且 $\angle DAP$ 為直角，

所以頂點 A 到底面 $\triangle BCD$ 的高度 $= \frac{\frac{1}{2} \times 4 \times 7}{\frac{1}{2} \times \sqrt{65}} = \frac{28}{\sqrt{65}} = \frac{28}{65} \sqrt{65}$ 。

【法三】架空間坐標系，並利用點到平面方程式的距離公式

架空間坐標系，例如：設 A 為原點，且 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 分別為 $+x$ 、 $+y$ 、 $+z$ 方

向，得 $C(4\sqrt{2}, 0, 0)$ ， $B(0, 4\sqrt{2}, 0)$ ， $D(0, 0, 7)$ 。

故平面 BCD 的方程式為 $\frac{x}{4\sqrt{2}} + \frac{y}{4\sqrt{2}} + \frac{z}{7} = 1$ ，化簡得 $7x + 7y + 4\sqrt{2}z = 28\sqrt{2}$ 。

(亦可求平面 BCD 的法向量為

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = (0, -4\sqrt{2}, 7) \times (4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}, 0) = (28\sqrt{2}, 28\sqrt{2}, 32) = 4\sqrt{2}(7, 7, 4\sqrt{2})。$$

故平面 BCD 的方程式為 $7x + 7y + 4\sqrt{2}z = 28\sqrt{2}$ 。)

$$\text{所以頂點 } A \text{ 到底面 } \triangle BCD \text{ 的高度} = \frac{28\sqrt{2}}{\sqrt{7^2 + 7^2 + (4\sqrt{2})^2}} = \frac{28}{65}\sqrt{65}。$$

二、評分原則：

1. 根據題意，能求出 $\overline{AD}$ 長度與四面體 $ABCD$ 的體積，且有正確的解題過程。
2. 可利用不同方法求出頂點 A 到底面 $\triangle BCD$ 的高度：例如可利用四面體 $ABCD$ 的體積；或利用 $\triangle APD$ 的面積；或透過架設空間坐標系，利用空間中的點到平面的距離公式，且有正確的解題過程。