

# 財團法人大學入學考試中心基金會

## 113學年度學科能力測驗試題

### 數學B考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

#### —作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是  $\frac{18-1}{18-2}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的  $\frac{3}{8}$  與第 18-2 列的  $\frac{8}{8}$  劃記，如：

|      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18-1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | - | ± |
| 18-2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | - | ± |

例：若答案格式是  $\frac{19-1}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的  $\frac{-7}{50}$  與第 19-2 列的  $\frac{7}{50}$  劃記，如：

|      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19-1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | - | ± |
| 19-2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | - | ± |

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有  $n$  個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有  $n$  個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯  $k$  個選項者，得該題  $\frac{n-2k}{n}$  的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有  $n$  個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

## 第壹部分、選擇（填）題（占85分）

### 一、單選題（占35分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 分。

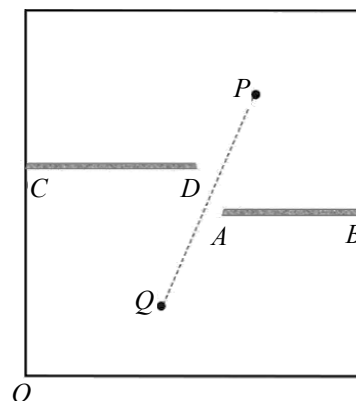
1. 某遊戲共有 210 位玩家，每位玩家均持有寶石，其中持有 1 顆的有 1 位，持有 2 顆的有 2 位，依此類推，持有 20 顆寶石的有 20 位。試問這些玩家每人持有寶石數量的第 90 百分位數為下列哪一個選項？

(1) 16                      (2) 17                      (3) 18                      (4) 19                      (5) 20

2. 已知  $a, b, c$  為實數，且滿足  $1 < a < 10$ 、 $b = \log a$ 、 $c = \log b$ ，試選出正確的選項。

(1)  $c < 0 < b < 1$                       (2)  $0 < c < 1 < b$                       (3)  $0 < c < b < 1$   
(4)  $1 < c < b$                       (5)  $c < b < 0$

3. 某射擊遊戲的玩家要避開障礙物射擊目標。今在遊戲畫面中設立一直角坐標系，以長方形螢幕左下角點  $O$  為原點，螢幕下方的邊緣為  $x$  軸、螢幕左方的邊緣為  $y$  軸，目標物放在點  $P(12,10)$ 。畫面中有兩面牆（牆厚度可忽略不計），一面牆由點  $A(10,5)$  水平延伸到點  $B(15,5)$ ，另一面牆由點  $C(0,6)$  水平延伸到點  $D(9,6)$ ，如右圖之示意圖。若玩家在點  $Q$  可直線射擊點  $P$  的目標物，不會被兩面牆阻擋。下列哪一個選項有可能是點  $Q$  的坐標？



(1) (6,3)                      (2) (7,3)                      (3) (8,5)                      (4) (9,1)                      (5) (9,2)

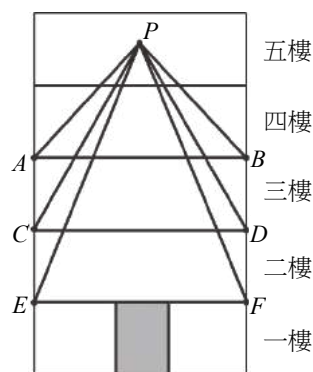
4. 已知坐標平面上有一向量  $\vec{v} = (-2, 3)$  及兩點  $A$ 、 $B$ ，且點  $A$  的  $x$  坐標和  $y$  坐標、點  $B$  的  $x$  坐標和  $y$  坐標都落在區間  $[0, 1]$  內，試問  $\left| \vec{v} + \vec{AB} \right|$  的最大值為下列哪一個選項？

(1)  $\sqrt{13}$                       (2)  $\sqrt{17}$                       (3)  $3\sqrt{2}$                       (4) 5                      (5)  $\sqrt{2} + \sqrt{13}$

5. 設二次函數  $f(x) = x^2 + bx + c$ ，其中  $b, c$  為實數。已知  $f(x-2) = f(-x-2)$  對任意實數  $x$  均成立，且當  $-3 \leq x \leq 1$  時， $f(x)$  的最大值會是最小值的 4 倍，則  $f(x)$  的最小值是下列哪一個選項？

- (1) 0                      (2)  $\frac{5}{3}$                       (3) 3                      (4) 4                      (5) 6

6. 某大樓居民在大樓外牆展示聖誕樹造型燈飾，如圖所示，從五樓外牆某處  $P$  向四樓地板的兩端  $A, B$  拉小燈泡形成等腰三角形  $PAB$ ，其中  $\overline{PA} = \overline{PB}$ ；向三樓地板的兩端  $C, D$  拉小燈泡形成等腰三角形  $PCD$ ；向二樓地板的兩端  $E, F$  拉小燈泡形成等腰三角形  $PEF$ 。假設每層樓等高且樓地板等長。若五樓地板在三角形  $PAB$  內部所截出的線段長度為樓地板長度的  $\frac{1}{3}$ ，則五樓地板在三角形  $PEF$  內部所截出的線段長度是樓地板長度的幾分之幾？（燈飾粗細可忽略不計）



- (1)  $\frac{1}{7}$                       (2)  $\frac{1}{6}$                       (3)  $\frac{1}{5}$                       (4)  $\frac{2}{9}$                       (5)  $\frac{1}{4}$

7. 有一城市分為東、西兩區。兩區各有一個氣溫偵測站，該城市當天的最高溫（單位：攝氏度）是取這兩區當天氣溫的最大值來記錄。下表顯示東、西兩區某月（共 30 天）每日最高溫分布的情形。

| 溫度 $t$ | $18 \leq t < 24$ | $24 \leq t < 30$ | $30 \leq t < 36$ | $36 \leq t$ |
|--------|------------------|------------------|------------------|-------------|
| 東區（天數） | 0                | 11               | 14               | 5           |
| 西區（天數） | 3                | 12               | 15               | 0           |

根據上表，該城市當月每日最高溫分布的情形如下表。

| 溫度 $t$ | $18 \leq t < 24$ | $24 \leq t < 30$ | $30 \leq t < 36$ | $36 \leq t$ |
|--------|------------------|------------------|------------------|-------------|
| 天數     | $A$              | $B$              | $C$              | $D$         |

試選出有可能為數組  $(A, B, C, D)$  的選項。

- (1) (0,15,15,0)    (2) (3,12,15,5)    (3) (0,9,16,5)    (4) (3,7,15,5)    (5) (0,12,13,5)

## 二、多選題（占 25 分）

說明：第 8 題至第 12 題，每題 5 分。

8. 已知正實數數列  $a, b, c, d, e$  為等比數列，且  $a < b < c < d < e$ ，試選出下列為等比數列的選項。
- (1)  $a, -b, c, -d, e$
  - (2)  $e, d, c, b, a$
  - (3)  $\log a, \log b, \log c, \log d, \log e$
  - (4)  $3^a, 3^b, 3^c, 3^d, 3^e$
  - (5)  $abc, bcd, cde$
9. 已知多項式  $f(x)$  除以  $x^2 + 5x + 1$  後，所得出的商式為  $x^3 + 7x^2 + x + 3$ ，試選出下列可能為  $f(x)$  的選項。
- (1)  $2(x^3 + 7x^2 + x + 3)(x^2 + 5x + 1)$
  - (2)  $(x^3 + 7x^2 + x + 3)(x^2 + 5x + 1) - x$
  - (3)  $(x^3 + 7x^2 + x + 3)(x^2 + 5x + 1) + x^2$
  - (4)  $(x^3 + 7x^2 + x + 4)(x^2 + 5x + 1) - x$
  - (5)  $(x^3 + 7x^2 + x + 4)(x^2 + 5x + 1) - x^2$
10. 有兩個光點在一條長度為 120 公分的直線形軌道上移動，碰到端點就反向繼續移動。一開始兩點分別在軌道的兩端相向而動，光點 A、光點 B 的移動速率分別為每秒 5 公分及每秒 10 公分。試選出正確的選項。
- (1) 兩個光點第一次相遇的位置，與其中一個端點的距離為 40 公分
  - (2) 光點 A 的位置呈週期現象，週期為 24 秒
  - (3) 當光點 A 回到 A 的出發點時，光點 B 也在 B 的出發點
  - (4) 兩個光點第二次相遇在其中一個端點上
  - (5) 兩個光點在軌道上共有 3 個不同的相遇位置

11. 某國家過去五年的碳排放總量，由第 1 年的  $X$  億公噸二氧化碳當量（CO<sub>2</sub>e）下降至第 5 年的  $Y$  億公噸二氧化碳當量（CO<sub>2</sub>e），達到每年平均減碳 5% 的效益，亦即  $Y = (1 - 0.05)^4 X$ 。將五年的碳排放總量與年成長率記錄如下表，其中

第  $n$  年碳排放成長率 =  $\frac{(\text{第 } n \text{ 年碳排放總量}) - (\text{第 } n-1 \text{ 年碳排放總量})}{\text{第 } n-1 \text{ 年碳排放總量}}$ ， $n = 2, 3, 4, 5$ 。

|                                  | 第 1 年 | 第 2 年 | 第 3 年 | 第 4 年 | 第 5 年 |
|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 碳排放總量<br>(億公噸 CO <sub>2</sub> e) | $X$   | $A$   | $B$   | $C$   | $Y$   |
| 碳排放年成長率                          |       | -0.07 | $p$   | $q$   | $r$   |

試選出正確的選項。

- (1)  $A = 0.93X$   
(2)  $Y \leq 0.8X$   
(3)  $\frac{-0.07 + p + q + r}{4} = -0.05$   
(4)  $\sqrt[4]{\frac{Y}{X}} - 1 = -0.05$   
(5)  $0.93(1 + p)(1 + q)(1 + r) = (0.95)^4$

12. 小明寫了一個程式讓機器人在  $2 \times 2$  的棋盤中移動，如圖所示。每執行一次，程式會選擇「上、下、左、右」中的某一個方向，不同方向被選擇的機率均相等，並指示機器人依該方向移動一格，但若選到的方向會跑出棋盤，則機器人該次會停在原地。每次執行都是從上次所在位置依程式重新選取的方向移動，假設機器人的初始位置在  $A$ 。令執行程式  $n$  次後，機器人停留在  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  的機率分別為  $a_n$ 、 $b_n$ 、 $c_n$  和  $d_n$ 。試選出正確的選項。

- (1)  $b_1 = \frac{1}{4}$   
(2)  $b_2 = \frac{1}{8}$   
(3)  $a_2 + d_2 = \frac{3}{4}$   
(4)  $b_{99} = c_{99}$   
(5)  $a_{100} + d_{100} > \frac{1}{2}$

|     |     |
|-----|-----|
| $A$ | $B$ |
| $C$ | $D$ |

### 三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 已知  $a, b, c, d$  為實數，且  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。若  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a+1 \\ 2b+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ，則  $c-3d$  的值為

$\textcircled{13-1} \textcircled{13-2}$ 。

14. 某校全體高三學生都有報考學測數學  $A$  或數學  $B$ ，在這些學生中只報考數學  $A$  的學生占全體高三學生的  $\frac{3}{10}$ 。報考數學  $A$  的學生中有  $\frac{5}{8}$  的學生同時也報考數學  $B$ 。則只報考

數學  $B$  的學生在該校所有報考數學  $B$  的學生中所占的比例為  $\frac{\textcircled{14-1}}{\textcircled{14-2}}$ 。（化為最簡分數）

15. 已知  $P_1, P_2, Q_1, Q_2, R$  為平面上相異五點，其中  $P_1, P_2, R$  三點不共線，且滿足

$$\overrightarrow{P_1R} = 4\overrightarrow{P_1Q_1}, \quad \overrightarrow{P_2R} = 7\overrightarrow{P_2Q_2}, \quad \text{則 } \overrightarrow{Q_1Q_2} = \textcircled{15-1} \overrightarrow{P_1Q_1} + \textcircled{15-2} \textcircled{15-3} \overrightarrow{P_2Q_2}。$$

16. 在空間坐標系中，有一球心坐標在  $O(0,0,0)$  且北極點在  $N(0,0,2)$  的地球儀。已知球面上點  $A$  坐標為  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$ ，赤道上距離點  $A$  最遠的點為點  $P$ ，則在通過點  $A$ 、點  $P$  的大圓上

這兩點的劣弧長為  $\frac{\textcircled{16-1} \pi}{\textcircled{16-2}}$ 。（化為最簡分數）

17. 在一圓的圓周上取 12 個等分點並以順時針方向依序編 1 號至 12 號。由這 12 個點任取 3 點為頂點所形成的三角形中，三個內角的角度由小到大會成等差數列的三角形有

17-1 17-2 個。

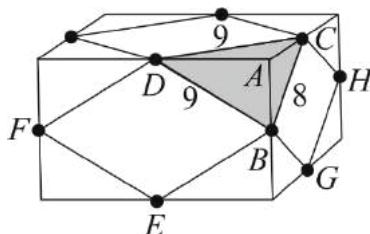
## 第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。

選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

### 18-20 題為題組

如圖所示，考慮長方體的石塊上某一頂點  $A$  及包含點  $A$  的一個面，令這個面的各邊中點分別為  $B, E, F, D$ 。此長方體上包含點  $B$  的另一個面，令其各邊中點分別為  $B, C, H, G$ 。已知  $\overline{BC}=8, \overline{BD}=\overline{DC}=9$ 。現將此石塊截去八個角，使得每個截角的截面恰通過該截角之三鄰邊的中點。根據上述，試回答下列問題。



18. 截角後的石塊為幾面體？（單選題，3 分）

(1)八面體      (2)十面體      (3)十二面體      (4)十四面體      (5)十六面體

19. 試求  $\triangle BCD$  的面積。（非選擇題，4 分）

20. 試求  $\overline{AD}$  的長度與四面體  $ABCD$  的體積，並求此四面體以  $\triangle BCD$  為底面時，頂點  $A$  到底面的高度。（角錐體積 =  $\frac{\text{底面積} \times \text{高}}{3}$ ）（非選擇題，8 分）

### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r (r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑）

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

3. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差  $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_X^2]}$

4. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數

$$r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

迴歸直線（最適合直線）方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$

5. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

6. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$