

113 學年度學科能力測驗數學 A 考科 非選擇題滿分參考答案與評分原則

學測數學 A 考科的題型有選擇（填）與混合題或非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考，詳細評分原則說明與部分學生作答情形，請參閱本中心將於 4 月 15 日出刊的第 342 期《選才電子報》。

113 學年度學科能力測驗數學 A 考科非選擇題各題的參考答案說明如下：

第 19 題

一、滿分參考答案：

因為 $\theta \leq \frac{\pi}{6}$ ，所以 $\frac{\overline{OP} \cdot (1,0,0)}{|\overline{OP}| \times 1} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \cos \theta \geq \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，整理得

$$4a^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)，故推得 a^2 \geq 3(b^2 + c^2)$$

二、評分原則：

根據題意知道 $\cos \theta$ 於 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 間遞減，寫出 $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且過程推論正確，推得 $a^2 \geq 3(b^2 + c^2)$ 。

第 20 題

一、滿分參考答案：

因為在平面 E 上，所以 $a - c = 4$ ，且 $b = 0$ ，代入 $a^2 \geq 3(b^2 + c^2)$ ，

得 $(4 + c)^2 \geq 3c^2$ ， $c^2 - 4c - 8 \leq 0$ ，解得 c 的最大可能範圍為

$$2 - 2\sqrt{3} \leq c \leq 2 + 2\sqrt{3}。$$

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{(c + 4)^2 + c^2} = \sqrt{2(c^2 + 4c + 8)} = \sqrt{2(c + 2)^2 + 8}，$$

因 $c = -2$ 不在上述 c 的最大可能範圍間，故所求 $\overline{OP}$ 最小值會發生在 $c = 2 - 2\sqrt{3}$ 時，其值為 $\sqrt{2(4 - 2\sqrt{3})^2 + 8} = \sqrt{64 - 32\sqrt{3}}$ 或 $4(\sqrt{3} - 1)$ 。

【 $\overline{OP}$ 的最小值的另解】 $\overline{OP}$ 的最小值發生在 $c = 2 - 2\sqrt{3}$ ，此時 $a^2 = 3c^2$ ，所以 $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{3c^2 + c^2} = 2|c| = 4(\sqrt{3} - 1)$ 。

二、評分原則：

1. 根據題意所給條件解得 c 的最大可能範圍。
2. 說明因 $c = -2$ 不在 c 的最大可能範圍間，故 $\overline{OP}$ 最小值會發生在 $c = 2 - 2\sqrt{3}$ 時，且其值為 $\sqrt{64 - 32\sqrt{3}}$ 或 $4(\sqrt{3} - 1)$ 。