

## 112 學年度學科能力測驗數學 A 考科 非選擇題滿分參考答案與評分原則

數學 A 的題型有選擇（填）與混合題或非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考，詳細評分原則說明與部分學生作答情形，請參閱本中心將於 4 月 17 日出刊的第 336 期《選才電子報》。112 學年度學科能力測驗數學 A 考科非選擇題各題的參考答案說明如下：

### 第 19 題

一、滿分參考答案：

#### 【法一】

由  $\overline{AP} = \overline{OA} = 1$  以及  $\angle AOP = \theta$  得  $\angle APO = \theta$ ，因此  $\angle OAP = \pi - 2\theta$ 。

另一方面由  $\overline{BQ} = \overline{OB}$  以及  $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$  得  $\angle QOB = \angle OQB = \frac{\pi}{2} - \theta$ ，因此  $\angle OBQ = 2\theta$ 。

由  $\angle OAP + \angle OBQ = \pi$ ，得證  $\overrightarrow{AP}$  與  $\overrightarrow{BQ}$  平行且同向。再加上  $\overline{BQ} = 2 = 2\overline{AP}$ ，

得證  $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AP}$ 。

又因  $\overrightarrow{BQ}$  和 x 軸正向夾角為  $2\theta$ ，以及  $\overline{BQ} = 2$  得  $\overrightarrow{BQ} = 2(\cos 2\theta, \sin 2\theta) = (\frac{14}{25}, \frac{48}{25})$ 。

因 B 點坐標為  $(-2, 0)$ ，得 Q 點坐標為  $(-2, 0) + (\frac{14}{25}, \frac{48}{25}) = (-\frac{36}{25}, \frac{48}{25})$ 。

#### 【法二】

由題設  $\angle AOP = \theta$  且  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，得直線  $\overline{OP}$  斜率為  $\frac{3}{4}$ 。設 P 點坐標為  $(4t, 3t)$ ，

由  $\overline{AP}^2 = (4t - 1)^2 + (3t)^2 = 1$  解得  $t = \frac{8}{25}$ ，故 P 點坐標為  $(\frac{32}{25}, \frac{24}{25})$ 。

又依題設  $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ ，知直線  $\overline{OQ}$  斜率為  $-\frac{4}{3}$ 。設 Q 點坐標為  $(-3t, 4t)$ ，

由  $\overline{BQ}^2 = (3t - 2)^2 + (4t)^2 = 4$  解得  $t = \frac{12}{25}$ ，故 Q 點坐標為  $(-\frac{36}{25}, \frac{48}{25})$ 。

根據上述，因為  $\overrightarrow{BQ} = (-\frac{36}{25}, \frac{48}{25}) - (-2, 0) = (\frac{14}{25}, \frac{48}{25})$ ， $\overrightarrow{AP} = (\frac{32}{25}, \frac{24}{25}) - (1, 0) = (-\frac{7}{25}, \frac{24}{25})$ ，

得證  $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AP}$ 。

### 【法三】

因  $\triangle POA$  為腰長為 1 底角為  $\theta$  的等腰三角形，故  $\overline{OP} = 2\cos\theta = \frac{8}{5}$ 。因此得點  $P$  極坐標為  $[\frac{8}{5}, \theta]$ ，即點  $P$  坐標為  $\frac{8}{5}(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = (\frac{32}{25}, \frac{24}{25})$ 。又依題設  $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ ，知  $\triangle QOB$  為腰長為 2 底角為  $\frac{\pi}{2} - \theta$  的等腰三角形，故  $\overline{OQ} = 2 \times 2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{12}{5}$ 。因此得點  $Q$  極坐標為  $[\frac{12}{5}, \frac{\pi}{2} + \theta]$ ，

即點  $Q$  坐標為  $\frac{12}{5}(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}) = (\frac{-36}{25}, \frac{48}{25})$ 。

根據上述，因為  $\overrightarrow{BQ} = (\frac{-36}{25}, \frac{48}{25}) - (-2, 0) = (\frac{14}{25}, \frac{48}{25})$ ， $\overrightarrow{AP} = (\frac{32}{25}, \frac{24}{25}) - (1, 0) = (\frac{7}{25}, \frac{24}{25})$ ，

得證  $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AP}$ 。

二、評分原則：

1. 根據題意所給條件，正確推論  $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AP}$ ，且理由須正確。

2. 正確解出  $Q$  點坐標為  $(\frac{-36}{25}, \frac{48}{25})$ ，且過程正確。

## 第 20 題

一、滿分參考答案：

### 【法一】

由  $\angle OBQ = 2\theta$  得  $A$  點到  $\overline{BQ}$  的距離為  $\overline{AB}\sin 2\theta = 3 \times \frac{24}{25} = \frac{72}{25}$ 。

因四邊形  $PABQ$  為兩底分別為  $\overline{AP} = 1, \overline{BQ} = 2$  的梯形，故得面積為  $\frac{3}{2} \times \frac{72}{25} = \frac{108}{25}$ 。

### 【法二】

直線  $\overline{BQ}$  的斜率為  $\tan 2\theta = \frac{24}{7}$  且通過  $B(-2, 0)$ ，故方程式為  $y = \frac{24}{7}(x + 2)$ ，

因此點  $A(1, 0)$  到  $\overline{BQ}$  的距離為  $\frac{3 \times \frac{24}{7}}{\sqrt{1^2 + (\frac{24}{7})^2}} = \frac{72}{25}$ 。

因四邊形  $PABQ$  為兩底分別為  $\overline{AP}=1, \overline{BQ}=2$  的梯形，故得面積為  $\frac{3}{2} \times \frac{72}{25} = \frac{108}{25}$ 。

**【法三】**

點  $Q$  的  $y$  坐標為  $\frac{48}{25}$ ，故三角形  $AQB$  面積為  $\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{48}{25} = \frac{72}{25}$ 。

又  $\overline{BQ}=2$ ，故  $A$  點到  $\overline{BQ}$  的距離  $h$  滿足  $\frac{1}{2} \times 2 \times h = \frac{72}{25}$ ，得  $h = \frac{72}{25}$ 。

因四邊形  $PABQ$  為兩底分別為  $\overline{AP}=1, \overline{BQ}=2$  的梯形，故得面積為  $\frac{3}{2} \times \frac{72}{25} = \frac{108}{25}$ 。

**【法四】**

$\triangle BOQ$  底為 2 高為  $\frac{48}{25}$ （或底為  $\frac{12}{5}$  高為  $\frac{8}{5}$ ），故面積為  $\frac{48}{25}$ 。

$\triangle POQ$  為兩股分別為  $\frac{12}{5}$ 、 $\frac{8}{5}$  的直角三角形，故面積為  $\frac{48}{25}$ 。

$\triangle AOP$  底為 1 高為  $\frac{24}{25}$ （或底為  $\frac{8}{5}$  高為  $\frac{3}{5}$ ），故面積為  $\frac{12}{25}$ 。

因此四邊形  $PABQ$  的面積為  $\triangle BOQ + \triangle QOP + \triangle POA = \frac{48}{25} + \frac{48}{25} + \frac{12}{25} = \frac{108}{25}$ 。

四邊形  $PABQ$  為兩底分別為  $\overline{AP}=1, \overline{BQ}=2$  的梯形，

故  $A$  點到  $\overline{BQ}$  的距離  $h$  滿足  $\frac{3}{2} \times h = \frac{108}{25}$ ，得  $h = \frac{72}{25}$ 。

二、評分原則：

1. 正確寫出點  $A$  到直線  $BQ$  的距離為  $\frac{72}{25}$ ，且過程正確。

2. 正確寫出四邊形的面積為  $\frac{108}{25}$ ，且過程正確。