三民輔考－高考　工程數學

109 年

甲、申論題部分：

一、求 $y''-\frac{4}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=x^2+x$ ，for x > 0，的通解（general solution）。

【答】：

原微分方程通分後可得 $x^2y''-xy'+4y=x^4+x^3$ ，是 Cauchy-Euler equation。

1.求 y_h： $m(m-1)-4m+4=0 \rightarrow m^2-5m+4=0 \rightarrow m=4,1$

$\therefore y_h(x)=c_1x^4+c_2x$

2.求 y_p :設 $x=e^t$ ，則原式可改為 $\ddot{y}-5\dot{y}+4y=e^{4t}+e^{3t}$

$$\therefore y_p(t)=\frac{1}{(D-1)(D-4)}(e^{4t}+e^{3t})=\frac{1}{(D-1)(D-4)}(e^{4t})+\frac{1}{(D-1)(D-4)}(e^{3t})$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{(D-4)}(e^{4t})+\frac{1}{(3-1)(3-4)}(e^{3t})=\frac{1}{3}te^{4t}-\frac{1}{2}e^{3t}$$

故 $y_p(x)=\frac{1}{3}x^4\ln x-\frac{1}{2}x^3$

因此通解為 $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=c_1x^4+c_2x+\frac{1}{3}x^4\ln x-\frac{1}{2}x^3$

二、求 $3H(2-t)$ 的拉普拉斯轉換（Laplace transform），其中 H(t)定義為：

$$H(t)=\begin{cases}0, t<0\\1, t\geq 0\end{cases}$$ 。

【答】：

直接依據拉普拉斯轉換之定義：

$$L\{3H(2-t)\}=\int_0^\infty 3H(2-t)e^{-st}dt=\int_0^2 3e^{-st}dt=-\frac{3}{s}[e^{-st}]\Big|_0^2=\frac{3}{s}(1-e^{-2s})$$

三、若 $i^{1+i}=a+bi$，求 a 及 b。

【答】：

$$i\cdot i^i=ie^{\ln(i^i)}=ie^{i\ln i}=ie^{i[\ln 1+i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)]}=ie^{-(\frac{\pi}{2}+2n\pi)},\quad n=0,1,2,\cdots$$

對照原題目可得 $a=0$ 及 $b=e^{-(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}, n=0,1,2,\cdots$

四、讓 $\vec{u}=3\hat{i}+j+k$ 及 $\vec{v}=\hat{i}+j+2k$，其中 $\hat{i}$，j 及 k 為單位向量，則 $\vec{u}$ 向 $\vec{v}$ 投影的長度為何？

【答】：

根據正投影長的定義：

$$proj_v(\vec{u})=|\vec{u}|\cos\theta=|\vec{u}|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{3+1+2}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

五、x 為一連續隨機變數，其密度函數 f 為 $f(x)=ae^{-x}$，其中 a 為一常數，$0\le x<\infty$。求機率 $P(1\le x\le 2)=?$

【答】：

注意本題機率密度函數尚未正規化: Check $\int_0^\infty f(x)dx=1$

$$\int_0^\infty ae^{-x}dx=a\int_0^\infty e^{-x}dx=a[-e^{-x}]\Big|_0^\infty=a \quad \therefore a=1$$

$$\therefore P(1\le x\le 2)=\int_1^2 e^{-x}dx=[-e^{-x}]\Big|_1^2=e^{-1}-e^{-2}$$

六、$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\2&1&0\end{bmatrix}$

（一）求 A 的行列式值(determinant)。

（二）求 A 所有特徵值(eigenvalues)及其對應之特徵向量(eigenvectors)。

（三）求 A 的零空間(null space)。

【答】：

1. $\det A=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2+2=0$

2.

已知 $\det A=0$，代表其中一個特徵值 $\lambda=0$。經由觀察可知對角線元素減 1 會使得前兩列平行，故 $\lambda=1$。最後根據跡數求出最後一個特徵值為 $\lambda=1$，因此 $\lambda=0,1$(重)。

(1) If $\lambda=0$:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \rightarrow x_1:x_2:x_3=1:-(2):1=1:-2:1$$

$$\therefore e_1=c_1\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

(2) If $\lambda=1$:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \rightarrow x_1:x_2:x_3=-2:-(-4):0=1:-2:0$$

$$\therefore e_2=c_2\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\end{bmatrix}$$

3.

零空間求法即為求出 $Ax=O$ 之解。由上一小題可知解就是 $\lambda=0$ 之特徵向量，故：

$$Null(A)=c_1\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

乙、測驗題部分:

（C） 1. 下列何者為以(1,2,2), (0,1,-2) ,(1,4,1), (2,5,5)為頂點之平行四邊形的面積？

(A) 144 (B) $\sqrt{144}$ (C) $\sqrt{86}$ (D) 86

【解析】

任取其中三點 $A=(1,2,2)$， $B=(0,1,-2)$ 及 $C=(1,4,1)$

→ $\overline{AB}=\langle -1,-1,-4\rangle$， $\overline{AC}=\langle 0,2,-1\rangle$

則平行四邊形面積為：

$$A=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\left\|\begin{matrix}\hat{i} & j & k\\ -1 & -1 & -4\\ 0 & 2 & -1\end{matrix}\right\|=\left|\langle 9,-1,-2\rangle\right|=\sqrt{81+1+4}=\sqrt{86}$$

（A） 2. 設平面 $S_1: x+2y-2z=3$、平面 $S_2: 2x+4y-4z=7$，則平面 S_1 與平面 S_2 之最短距離為何？

(A) 1/6 (B) 1 (C) 2 (D) 4

【解析】

依據兩平行之平面距離公式:以 $ax+by+cz=d_1$ 及 $ax+by+cz=d_2$ 為例。

$$d(E_1,E_2)=\frac{\left|d_2-d_1\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

注意 S_2 要先約分才能代入公式: $x+2y-2z=\frac{7}{2}$

$$\therefore d(S_1,S_2)=\frac{\left|\frac{7}{2}-3\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{1}{6}$$

（D） 3. 設 A 為 4×4 的矩陣，若 A 的行列值 $\det(A)=-2$，則 $\det(-2A)$ 之值為何？

(A) 4 (B) -4 (C) 32 (D) -32

【解析】

由行列式運算法則:對 $n\times n$ 之矩陣 A 而言， $\det(kA)=k^n\det(A)$

$$\therefore \det(-2A_{4\times4})=(-2)^4\det(A)=16\times(-2)=-32$$

（C） 4. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$ 之反矩陣 $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$，求 $a+e+i=?$

(A) 0　(B) -1　(C) $-\frac{9}{4}$　(D) $\frac{9}{4}$

【解析】

反矩陣之特徵值正好是原矩陣特徵值的倒數，則：

$$a+e+i=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}=\frac{\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$

其中，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det(A)=4$，且 $\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=\sum_{i=1}^{3}M_{ii}=-9$（對角線 Minor 總和），因此可得

$$a+e+i=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}=-\frac{9}{4}$$ ，答案為(C)。

（A） 5. 若轉換函式 $T:R^2\to R^2$ 可表示為 $T(x,y)=(2x+y,3x+4y)$，則其逆轉換 $T^{-1}(5,6)$ 為何？

(A) (14/5, -3/5)　(B) (16,39)　(C) (1/16, 1/39)　(D) (39,16)

【解析】

改寫成矩陣表示法: $\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

取反矩陣可得逆轉換關係: $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\3&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&-1\\-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$

故 $T^{-1}(x,y)=(\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}y,-\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y)$，因此題目所求為

$T^{-1}(5,6)=(\frac{14}{5},-\frac{3}{5})$，答案選(A)。

（#） 6. 令 $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\end{bmatrix}$，D 為對角矩陣且 $D=X^{-1}AX$，求方陣 X：

(A) $\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$

【解析】

求特徵值與特徵向量。

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \rightarrow (\lambda-1)\lambda-6=0 \quad \therefore \lambda=3,-2$

(1) If $\lambda=3$：$A-3I=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \therefore e_1=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) If $\lambda=-2$：$A+2I=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore e_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

將特徵向量組成矩陣即為極目要求之轉移矩陣 X，故(A)(C)皆為答案。

（A）7. 下列何者是$1+i$的四次方根？

(A) $2^{\frac{1}{8}}(\cos(\frac{\pi}{16})+i\sin(\frac{\pi}{16}))$ (B) $2^{\frac{1}{8}}(\cos(\frac{\pi}{8})+i\sin(\frac{\pi}{8}))$

(C) $2^{\frac{1}{4}}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$ (D) $2^{\frac{1}{4}}(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}))$

【解析】

$1+i=\sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+2n\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+2n\pi)]$

$\rightarrow (1+i)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{8}}[\cos(\frac{\pi}{16}+\frac{n}{2}\pi)+i\sin(\frac{\pi}{16}+\frac{n}{2}\pi)]$，$n=0,1,2,3$

因此答案選(A)。

（C）8. 在複數空間$z=x+iy$，化簡$(\overline{\frac{6-2i}{1-i}})$：（其中$\overline{f(z)}$為對複數函數$f(z)$取共軛複數（complex conjugate），以及$i=\sqrt{-1}$。）

(A) $4+2i$ (B) $-4+2i$ (C) $4-2i$ (D) $-4-2i$

【解析】

$z=(\overline{\frac{6-2i}{1-i}})=\frac{6+2i}{1+i}=\frac{(6+2i)(1-i)}{(1-i)(1-i)}=\frac{6-4i+2}{2}=4-2i$，答案選(C)。

（B）9. 求複數積分$\oint_C \frac{ie^z dz}{(z-1+i)^2}=?$

（其中積分路徑 C 為$|z-1|=5$之逆時針方向圓周）

(A) $2\pi e(\cos 1+i\sin 1)$ (B) $-2\pi e(\cos 1-i\sin 1)$

(C) $\pi e(\cos1+i\sin1)$ (D) $-\pi e(\cos1-i\sin1)$

【解析】

$z=1-i$ 位於 C 內部。利用柯西積分公式：

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz=\frac{2\pi i}{(2-1)!}f(a)\text{，其中 } f(z)=ie^z$$

$$\oint_C \frac{ie^z dz}{(z-1+i)^2}=\frac{2\pi i}{1!}[ie^z]\Big|_{z=1-i}=-2\pi e^{1-i}=-2\pi e\cdot e^{-i}=-2\pi e(\cos1-i\sin1)$$

答案選(B)。

（C）10. 下列複數級數何者為發散？

(A) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$ (B) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}$ (C) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{i+1}{\sqrt{2}})^n$ (D) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+in(-1)^n}{(n+1)^2}$

【解析】

(A) By ratio test: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(1+i)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{(1+i)^n}{2^n}}\right|=\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，故級數收斂。

(B) By ratio test: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(1+i)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(1+i)^n}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+i}{n+1}\right|=0<1$，故級數收斂。

(C) 此級數是無窮等比級數，公比是 $r=\left|\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right|=1$，故級數發散。

(D) 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 做比較審斂法可知原級數收斂。

（B）11. 求解微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+1.25\frac{dy}{dx}-0.875y=0$:

(A) $y=c_1e^{0.5x}+c_2e^{1.75x}$ (B) $y=c_1e^{0.5x}+c_2e^{-1.75x}$

(C) $y=c_1e^{3.5x}+c_2e^{0.25x}$ (D) $y=c_1e^{3.5x}+c_2e^{-0.25x}$

【解析】

輔助方程式為 $\alpha^2+1.25\alpha-0.875=0$，因此兩根之和為 $\alpha_1+\alpha_2=-1.25$，滿足指數次方相加是 -1.25 的選項只有(B)。

（A） 12. $3x^2+xy^\alpha-x^2y^{\alpha-1}y'=0$ 為正合(Exact)，則 $\alpha=$？

(A) -2　(B) -1　(C) 0　(D) 1

【解析】

原方程式改寫成 $(3x^2+xy^\alpha)dx-x^2y^{\alpha-1}dy=0$

正合條件: $\dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2+xy^\alpha)=\dfrac{\partial}{\partial x}(-x^2y^{\alpha-1})$

→ $\alpha xy^{\alpha-1}=-2xy^{\alpha-1}$　$\therefore \alpha=-2$

（C） 13. 求微分方程式 $y^{(4)}+4y^{(3)}+7y^{(2)}+6y^{(1)}+2y=0$ 的通解：

（其中 $y^{(n)}=\dfrac{d^ny}{dx^n}$。）

(A) $c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3x^2e^{-x}+c_4x^3e^{-x}$

(B) $c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3e^{x}\cos x+c_4e^{x}\sin x$

(C) $c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3e^{-x}\cos x+c_4e^{-x}\sin x$

(D) $c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3\cosh x+c_4\sinh x$

【解析】

輔助方程式為 $\alpha^4+4\alpha^3+7\alpha^2+6\alpha+2=0$

→ $(\alpha+1)^2(\alpha^2+2\alpha+2)=0$　$\therefore \alpha=-1\pm i,-1$(重)

因此解為 $c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3e^{-x}\cos x+c_4e^{-x}\sin x$，答案選(C)。

（C） 14. 將 Bessel equation $x^2y''+xy'+(k^2x^2-v^2)y=0$（其中 v、k 為常數）化成 Sturm-Liouville 之形式為 $\dfrac{d}{dx}[p(x)\dfrac{dy}{dx}]+(\lambda\omega(x)+q(x))y=0$，下列何者正確？

(A) $p(x)=x^2$　(B) $p(x)=\dfrac{x^2}{2}+x$　(C) $p(x)=x$　(D) $p(x)=x^{\frac{1}{2}}$

【解析】

本題便是考 Bessel equation 的 Weight function，根據定義答案為(C)。

（B） 15. 利用拉氏轉換求 $\int_0^\infty t\cos te^{-2t}dt=$？

(A) $\dfrac{4}{25}$　(B) $\dfrac{3}{25}$　(C) $\dfrac{2}{25}$　(D) $\dfrac{1}{25}$

【解析】

$$\int_0^\infty t\cos t e^{-2t}dt = \mathcal{L}\{t\cos t\}\big|_{s=2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\Big|_{s=2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=2} = \frac{3}{25}$$

（C） 16. 下列何者為 $Y(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s(s^2+4)}$ 之反拉普拉斯轉換（inverse Laplace transform）？（其中 u(t)為單位步階函數（unit step function）。）

(A) $y(t)=[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin 2(t-2)]u(t-2)$

(B) $y(t)=[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sin 2(t-2)]u(t-2)$

(C) $y(t)=[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2(t-2)]u(t-2)$

(D) $y(t)=[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2(t-2)]u(t-2)$

【解析】

$$Y(s)=\frac{e^{-2s}}{s(s^2+4)}=\left[\frac{\frac{1}{4}}{s}+\frac{-\frac{1}{4}s}{s^2+4}\right]e^{-2s}$$

由第二位移定理:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{4}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4})e^{-2s}\}=\frac{1}{4}[1-\cos(t-2)]u(t-2)$$

（C） 17. 一週期函數 $f(x)=1+\sin^2 2x$，則其傅立葉級數（Fourier series）為：

(A) $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sin 4x$ (B) $f(x)=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x$

(C) $f(x)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x$ (D) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cos 2x$

【解析】

本題只是將三角函數次方降次而已。

$$f(x)=1+\sin^2 2x=1+\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x$$

（D） 18. 若 A、B 是機率不為零且互為獨立的事件，則下列何者不一定成立？

(A) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$　(B) $P(A\cap \overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

(C) $P(A|B)=P(A|\overline{B})$　(D) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

【解析】

(D) A 和 B 雖為獨立但是並非相斥事件，因此兩事件之聯集並非機率相加。

（C） 19. 設 X 為一連續隨機變數，其機率密度函數為

$f(x)=\begin{cases} C(4x-2x^2), 0<x<2 \\ 0, elsewhere \end{cases}$，則其 C 值為多少？

(A) 1/2　(B) 1/4　(C) 3/8　(D) 5/8

【解析】

將機率密度函數正規化:

$\int_0^2 f(x)dx=1$ →

$\int_0^2 C(4x-2x^2)dx=C[2x^2-\frac{2}{3}x^3]\Big|_0^2=C\cdot(8-\frac{16}{3})=\frac{8}{3}C=1 \quad \therefore C=\frac{3}{8}$

（C） 20. 假設一隨機變數 X，其動量產生函數(moment-generating function)為

$M_X(t)=e^{t+2t^2}$；試問此隨機變數 X 的期望值(mean)為何？

(A) 0　(B) 0.5　(C) 1　(D) 2

【解析】

$\langle X\rangle=\frac{dM_X}{dt}\Big|_{t=0}=(4t+1)e^{t+2t^2}=e^0=1$，答案選(C)。

備註：第 6 題答 A 或 C 或 AC 者均給分。