三民輔考－高考　工程數學

108 年

甲、申論題部分：

一、空間中有 $a=(1,1,1)$，$b=(3,4,5)$，$c=(2,3,4)$，$d=(1,2,2)$ 四點，求$\overrightarrow{ab}$，$\overrightarrow{ac}$和$\overrightarrow{ad}$三個向量所組成平行四邊的體積?

【答】：

三向量$\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$所拓張之平行六面體（也就是題目所指的平行四邊）之體積為：

$$V=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\left\|\begin{matrix}\vec{A}\\ \vec{B}\\ \vec{C}\end{matrix}\right\|$$ （排列成一個三階矩陣）

$\overrightarrow{ab}=\langle 2,3,4\rangle$，$\overrightarrow{ac}=\langle 1,2,3\rangle$，$\overrightarrow{ad}=\langle 0,1,1\rangle$

故$$V=\left\|\begin{matrix}2&3&4\\1&2&3\\0&1&1\end{matrix}\right\|=\left|2\times(2-3)-1\times(3-4)\right|=\left|-2+1\right|=1$$

二、假設路徑C是一逆時針的正方形邊界，其各邊位於直線 $x=\pm2$ 和 $y=\pm2$。請求出下列積分值：

（一）$\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}dz$

（二）$\displaystyle\int_C \frac{\cosh z}{z^4}dz$

【答】：

（一）

$\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}dz$ 的極(Pole)為 $z=0,\pm 2\sqrt{2}i$，

只有 $z=0$ 在圍線 C 之內，故只需要算 $z=0$ 之留數值。

$$Res(0)=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\cos z}{z(z^2+8)}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{(z^2+8)}=\frac{1}{8}$$

故 $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}dz=2\pi i Res(0)=\frac{\pi i}{4}$

（二）

$\int_C \frac{\cosh z}{z^4}dz$ 之極(Pole)為 $z=0$，

且其為四階極點，$z=0$ 在圍線 C 之內，故需要計算留數值。

本題要使用 $Res(a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$

$$Res(0)=\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}[z^4 f(z)]=\frac{1}{6}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}[z^4\cdot\frac{\cosh z}{z^4}]$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}[\cosh z]=\frac{1}{6}\lim_{z\to 0}\sinh z=0$$

故 $\int_C \frac{\cosh z}{z^4}dz=2\pi i Res(0)=0$

三、利用積分因子，解微分方程式 $2\sin(y^2)dx+xy\cos(y^2)dy=0$，$y(2)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

【答】：

Take $M(x,y)=2\sin(y^2)$ and $N(x,y)=xy\cos(y^2)$

$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=4y\cos(y^2)$, $\frac{\partial N}{\partial x}=y\cos(y^2)$

Check: $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{4y\cos(y^2)-y\cos(y^2)}{xy\cos(y^2)}=\frac{3}{x}=f(x)$ (O)

Then $I(x)=e^{\int f(x)dx}e^{\int\frac{3}{x}dx}=x^3$

乘回原本之微分方程式中：

$$2x^3\sin(y^2)dx + x^4 y\cos(y^2)dy = 0$$

此時便存在一位勢函數 $\phi(x,y)$，滿足 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = IM$ 及 $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = IN$，則：

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = IM = 2x^3\sin(y^2) \rightarrow \phi(x,y) = \frac{1}{2}x^4\sin(y^2) + k_1(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = IN = x^4 y\cos(y^2) \rightarrow \phi(x,y) = \int x^4 y\cos(y^2)dy = \frac{1}{2}x^4\sin(y^2) + k_2(x)$$

比較兩式可得 $k_1(y) = k_2(x) = 0$

故本題之通解為 $\phi(x,y) = \dfrac{1}{2}x^4\sin(y^2) = c$

又 $y(2) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$： $\dfrac{1}{2}\times 2^4 \times \sin(\dfrac{\pi}{2}) = c \quad \therefore c = 8$

因此本題之特解為 $\dfrac{1}{2}x^4\sin(y^2) = 8$ 或 $x^4\sin(y^2) = 16$

四、設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

（一）求 A 的特徵值(Eigenvalues)

（二）求 A 的特徵向量(Eigenvectors)

【答】：

要計算矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 的特徵值，只要交對角線減掉 λ 後計算行列式即可。

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

因為減掉特徵值後使得上面行列式為 0，代表至少有兩列會互相平行，可推測出 $\lambda = 2$。代回驗證可得到：

$$A-2I=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

由於三列皆互相平行，代表必存在$\lambda=2$之二重根。最後利用跡數(Trace)來求出第三個特徵值。跡數的定義便是原矩陣對角線數字相加，也是特徵值之和。

$$Tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+2+\lambda_3=5 \quad \therefore \lambda_3=1$$

因此本題矩陣之特徵值為$2,2,1$。接著要計算特徵向量，只要將特徵值代回矩陣方程式求解即可：

1.若$\lambda=2$: $\begin{bmatrix}-2 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$

◎重根快速解法：

取任意一列，蓋住一個元素，其餘兩個元素交換位置，並且任選一個掛負號。

因此可得特徵向量為 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$

2.若$\lambda=1$: $\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$

◎快速解法:遮住一列，其餘兩列(不可平行)利用餘因子之算法求出特徵向量。

因此遮住第三列，則特徵向量為：

$$x_1:x_2:x_3=\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}:-\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2:-1:-1 \rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$$

乙、測驗題部分：

（C）1. V 和 W 是有限維度的空間向量，T 為 $V \to W$ 的函數，下列敘述何者正確?

(A)若 $T(x+y)=T(x)+T(y)$，則 T 為線性變換。

(B)T 為一對一函數，若且唯若 $N(T)=\{0\}$，其中 $N(T)$ 為 T 的 Null space。

(C)若 T 為線性變換，則 $Nullity(T)+rank(T)=\dim(V)$。

(D)若 $x_1, x_2 \in V$，$y_1, y_2 \in W$，則必定存在一線性變換 $T: V \to W$ 使得 $T(x_1)=y_1$ 及 $T(x_2)=y_2$。

【解析】

(A)逆敘述才正確。(B)T 必須是線性變換才成立。(D)不一定存在 T。

（D）2. 試決定下列各個線性變換 T，何者不是一對一線性變換?

(A) $T: R^2 \to R^2$，$T(x,y)=(y,x)$

(B) $T: R^2 \to R^2$，$T(x,y)=(x+y, x-y)$

(C) $T: R^2 \to R^3$，$T(x,y)=(x, y, x+y)$

(D) $T: R^2 \to R^3$，$T(x,y)=(x-y, y-x, 2x-2y)$

【解析】

由變換關係寫出對應的矩陣方程式:

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$: $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$之行列式值不為 0，故為一對一。

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$之行列式值不為 0，故為一對一。

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix}$: $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$N(A)=0$，故為一對一。

(D) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-y \\ y-x \\ 2x-2y \end{bmatrix}$: $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$，$N(A)\neq 0$，故不為一對一。

（A）3. 矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$，試問 $Rank(A^T B)$ 為何?

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

【解析】

若 $n\times k$ 之矩陣 B 的秩為 n，則 $rank(AB)=rank(A)$。且轉置不影響秩數(行列等價性)，意即 $Rank(A^T)=Rank(A)$，因此本題只要檢查 A 的秩即可。可看出 A 的兩列平行，故： $Rank(A^TB)=Rank(A)=1$

（D）4. 求 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}^{100}=?$

(A) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

【解析】

從矩陣架構可以看出其為旋轉矩陣，因此根據棣美弗定理，次方可以降成角度：

$$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}\cos\frac{100}{6}\pi & -\sin\frac{100}{6}\pi\\ \sin\frac{100}{6}\pi & \cos\frac{100}{6}\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

（A）5. 線性變換 $L:R^3\to R^3$，

$L(x,y,z)=(2x+3y+z,3x+3y+z,2x+4y+z)$，試求其逆轉換為何?

(A) $L^{-1}(x,y,z)=(-x+y,-x+z,6x-2y-3z)$

(B) $L^{-1}(x,y,z)=(-2x-3y-z,-3x-3y-z,-2x-4y-z)$

(C) $L^{-1}(x,y,z)=(0.5x+0.3y+z,-0.3x+0.3y+z,0.5x+0.25y+z)$

(D) $L^{-1}(x,y,z)=(2x+y+z,x+3y+z,x+4y+z)$

【解析】

寫成矩陣方程式的形式: $\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}$

只要取反矩陣便可求出逆轉換係數關係。對 $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\3&3&1\\2&4&1\end{bmatrix}$ 而言：

(1)先取轉置: $A^T=\begin{bmatrix}2&3&2\\3&3&4\\1&1&1\end{bmatrix}$

(2)計算子行列式: $M(A^T)=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\1&0&-1\\6&2&-3\end{bmatrix}$

(3)取餘因子(加上正負): $C(A^T)=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\6&-2&-3\end{bmatrix}$

以上計算方法求出之矩陣稱為伴隨矩陣 $adj(A)$。

(4)計算行列式值: $\det A=2\times(-1)-3\times(1)+1\times(6)=1$

故反矩陣 $A^{-1}=\dfrac{adj(A)}{\det(A)}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\6&-2&-3\end{bmatrix}$。對照係數可知答案為(A)。

（D）6. 下列何者不是矩陣 $\begin{bmatrix}5&32&17\\0&12&2\\0&-2&7\end{bmatrix}$ 的特徵值?

(A) 5　(B) 8　(C) 11　(D) 14

【解析】

$$\det\begin{bmatrix}5-\lambda&32&17\\0&12-\lambda&2\\0&-2&7-\lambda\end{bmatrix}=0 \rightarrow (5-\lambda)\begin{vmatrix}12-\lambda&2\\-2&7-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\rightarrow (5-\lambda)[(12-\lambda)(7-\lambda)+4]=(5-\lambda)(8-\lambda)(11-\lambda)=0$$

故此矩陣之特徵值為 $5,8,11$。

（C）7. 給定一複數函數為 $f(z)=r^{\frac{1}{3}}\cos(\dfrac{\theta+2\pi}{3})+ir^{\frac{1}{3}}\sin(\dfrac{\theta+2\pi}{3})$，其中 $z=x+iy=re^{i\theta}$，請問在 $\pi<\theta\le 3\pi$ 範圍內，$f(1+i)=?$

(A) $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$ (B) $\sqrt[6]{2}e^{-i\frac{3}{4}\pi}$ (C) $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{17}{12}\pi}$ (D) $\sqrt[6]{2}e^{-i\frac{17}{12}\pi}$

【解析】

$z=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}}$（根據題目要求的區間轉動角度）。

將 $r=\sqrt{2}$ 及 $\theta=\dfrac{9\pi}{4}$ 代入題目給的函數中即可得到答案：

$$f(1+t)=2^{\frac{1}{6}}\cos(\frac{\frac{9}{4}\pi+2\pi}{3})+i2^{\frac{1}{6}}\sin(\frac{\frac{9}{4}\pi+2\pi}{3})=2^{\frac{1}{6}}e^{i(\frac{\frac{9}{4}\pi+2\pi}{3})}=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17}{12}\pi}$$

（A）8. 曲線 C: $y=x^2$，從 $(0,0)$ 到 $(2,4)$，求 $\int_C z^2dz=?$

(A) $-\dfrac{88}{3}-\dfrac{16}{3}i$ (B) $-\dfrac{88}{3}+\dfrac{16}{3}i$ (C) $\dfrac{88}{3}-\dfrac{8}{3}i$ (D) $-\dfrac{88}{3}-\dfrac{8}{3}i$

【解析】

由於被積函數是解析函數，因此存在反導函數，可直接積分求值。

$$\int_C z^2dz=\frac{1}{3}z^3\Big|_0^{2+4i}=\frac{1}{3}(2+4i)^3=-\frac{88}{3}-\frac{16}{3}i$$

（C）9. 求複變級數 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}(z+i)^{2n}$ 之中心點(Center)及收斂半徑(Radius of convergence)：

(A)中心點為 i，收斂半徑為 e。

(B)中心點為 $-i$，收斂半徑為 $\dfrac{1}{e}$。

(C)中心點為 $-i$，收斂半徑為 $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$。

(D)中心點為 i，收斂半徑為 $\sqrt{e}$。

【解析】

收斂半徑的計算方法可由比值審斂法之定義求出:

Take $a_n=\dfrac{n^n}{n!}(z+i)^{2n}$, and by ratio test:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\left|z+i\right|^2<1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}\left|z+i\right|^2<1$$

$$\rightarrow \left|z+i\right|^2<\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{1}{e} \quad \therefore \left|z+i\right|<\frac{1}{\sqrt{e}}$$

故收斂半徑為 $\frac{1}{\sqrt{e}}$。

（A）10. 令 $y=a\cos 3x+b\sin 3x+c\cos 4x$ 為微分方程式 $y''+9y=14\cos 4x$ 之解，其中 $y(0)=0$，$y'(0)=3$，求 $a+b+c$ 值?

(A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 8

【解析】

(1)求 y_h： $\alpha^2+9=0 \rightarrow \alpha=\pm 3i$

$\therefore y_h(x)=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$

(2)求 y_p：

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+9}(14\cos 4x)=14\times\frac{1}{-(4)^2+9}\cos 4x=-2\cos 4x$$

因此 $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x-2\cos 4x$

由題目所給之條件:

(a) $y(0)=0$： $y(0)=c_1-2=0 \quad \therefore c_1=2$

(b) $y'(0)=3$： $y'(0)=3c_2\cos 3x=3 \quad \therefore c_2=1$

故 $y(x)=2\cos 3x+1\sin 3x-2\cos 4x$。

對照題目的未知數可知 $a+b+c=2+2-2=1$。

（C）11. 求 $\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$ 之拉普拉斯轉換(Laplace transform)，為下列何者?

(A) $\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ (B) $\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$ (C) $\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$ (D) $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

【解析】

由拉普拉斯轉換的基本運算方法：

$L\{\sin\omega t\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ 且 $L\{tf(t)\}=-\frac{dF}{ds}$：

$$L\{t\sin\omega t\}=-\frac{d}{ds}(\frac{\omega}{s^2+\omega^2})=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

因此 $L\{\frac{t}{2\omega}\sin\omega t\}=\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$

（D） 12. 下列何者是微分方程式 $y''-\frac{4}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=x^2+1$ 的解?（選項中 c_1 和 c_2 為任意常數，而 a_1 和 a_2 為某特定常數）

(A) $c_1x^2+c_1x^2\ln x+a_1+a_2x^2(\ln x)^2$

(B) $c_1x^2+c_1x^2\ln x+a_1x^2(\ln x)^2+a_2x^4$

(C) $c_1x+c_1x^4+a_1+a_2x^2$

(D) $c_1x+c_1x^4+a_1x^2+a_2x^4\ln x$

【解析】

此微分方程是 Cauchy-Euler equation: $x^2y''-4xy'+4y=x^4+x^2$

(1)求 y_h: $m(m-1)-4m+4=0$ → $m^2-5m+4=0$ → $m=4,1$

$\therefore y_h(x)=c_1x^4+c_2x$

(2)求 y_p: Set $x=e^t$ and substitute back

$$\ddot{y}-5\dot{y}+4y=e^{4t}+e^{2t}$$

$$y_p(t)=\frac{1}{(D-1)(D-4)}(e^{4t}+e^{2t})=\frac{1}{(D-1)(D-4)}e^{4t}+\frac{1}{(D-1)(D-4)}e^{2t}$$

$$=\frac{1}{(D-1)(D-4)}e^{4t}+\frac{1}{(D-1)(D-4)}e^{2t}=\frac{1}{3}\frac{1}{D-4}e^{4t}+\frac{1}{(2-1)(2-4)}e^{2t}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{D-4}e^{4t}+\frac{1}{(2-1)(2-4)}e^{2t}=\frac{1}{3}te^{4t}-2e^{2t}$$

$$\therefore y_p(x)=\frac{1}{3}x^4\ln x-2x^2$$

故 $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=c_1x^4+c_2x\frac{1}{3}x^4\ln x-2x^2$。結構相同者為(D)。

（B） 13. 請問 $e^{-2x}\cos x$ 是下列哪一微分方程式的解?

(A) $y'''+7y''+16y'-10y=0$　(B) $y'''+y''-7y'-15y=0$

(C) $y''+8y'+17y=0$　(D) $3y'''+2y''-8y'-16y=0$

【解析】

一解為 $e^{-2x}\cos x$，代表輔助方程式中具有 $\alpha=-2\pm i$ 之共軛複數根，或是具有 $\alpha^2+4\alpha+5=0$ 之因式。結果發現只有(B)可被整除，因此答案為(B)。

（B） 14. 下列何者不可能是 $y''+Ay'+By=0$（A 和 B 為常數）的解?

(A) x　(B) x^2　(C) e^{x+1}　(D) $e^x\cos(x+3)$

【解析】

常係數微分方程會出現 x^2 之齊次解代表已經將解增次 2 次了，這只有在三重根的時候才可能出現，但原本方程式最高階只有二階，其輔助方程式不可能會有三重根，因此本題答案是(B)。

（C） 15. 若 c 為常數，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 及 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 分別為偏微分波方程式(Wave equation)及偏微分熱方程式(Heat equation)，則下列何者錯誤?

(A) $u(x,t)=\sin 2t\sin x$ 是偏微分波方程式之解。

(B) $u(x,t)=e^{-4t}\cos 3x$ 是偏微分熱方程式之解。

(C) $u(x,t)=e^{t}\sin 3x$ 是偏微分波方程式之解。

(D) $u(x,t)=e^{-t}\sin x$ 是偏微分熱方程式之解。

【解析】

直觀做法便是將解直接代回檢查是否滿足，然而(C)的解隨著時間增加，振幅會愈來愈大，對一物理系統而言是不可能的。

（C） 16. 若 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換為 $L\{f(t)\}=F(s)$，則 $L\{t*e^{2t}\}$ 為何，其中符號”*”為迴旋積(Convolution)?

(A) $\dfrac{1}{s(s-2)}$　(B) $\dfrac{1}{s(s+2)}$　(C) $\dfrac{1}{s^2(s-2)}$　(D) $\dfrac{1}{s^2(s+2)}$

【解析】

由折積定義: $L\{f*g(t)\}=F(s)G(s)$

$$\therefore L\{t*e^{2t}\}=L\{t\}L\{e^{2t}\}=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-2}=\frac{1}{s^2(s-2)}$$

（C） 17. 有一函數 $F(x)=\begin{cases}0, -5<x<0\\ 3, 0<x<5\end{cases}$，週期為 10，則傅立葉係數 $b_n=\dfrac{1}{5}\int_{-5}^{5}F(x)\sin\dfrac{n\pi x}{5}dx$ 之值為何?

(A) $b_n = 0$　(B) $b_n = \dfrac{1-\cos n\pi}{n\pi}$　(C) $b_n = \dfrac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$　(D) $b_n = 3$

【解析】

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} F(x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\sin\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\Big|_5^0$$

$$= \frac{3}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

（A） 18.

連續隨機變數 X 具有機率密度函數 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, -1 < x < 2 \\ 0, otherwise \end{cases}$，求機率

$P(0 < X \le 1)$ 為何?

(A) $\dfrac{1}{9}$　(B) $\dfrac{2}{9}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{4}{9}$

【解析】

$$P(0 < X \le 1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{3}dx = [\frac{x^3}{9}]\Big|_0^1 = \frac{1}{9}$$

（B） 19. 設隨機變數(Random variable)X 和 Y 的聯合機率密度函數(Joint probability density function)為 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{12}e^{-\frac{x}{4}-\frac{y}{3}}, 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0, elsewhere \end{cases}$，則機率

$P(4 < X \le 12, 0 < Y < \infty)$ 之值為何?

(A) $e^{-3} - e^{-4}$　(B) $e^{-1} - e^{-3}$　(C) $e^{-1} - e^{-4}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

【解析】

$$P(4 < X \le 12, 0 < Y < \infty) = \int_0^\infty\int_4^{12}\frac{1}{12}e^{-\frac{x}{4}-\frac{y}{3}}dxdy = \frac{1}{12}\int_4^{12}e^{-\frac{x}{4}}dx\int_0^\infty e^{-\frac{y}{3}}dy$$

$$= \frac{1}{12}\int_4^{12}e^{-\frac{x}{4}}dx\int_0^\infty e^{-\frac{y}{3}}dy = \frac{1}{12}[-4e^{-\frac{x}{4}}\Big|_4^{12}][-3e^{-\frac{y}{3}}\Big|_0^\infty]$$

$$= (e^{-3} - e^{-1}) \times (-1) = e^{-1} - e^{-3}$$

（C）20. 某連續隨機變數 X 之值域為$[0,1]$，密度函數為 $f(x)=2x$，試求期望值 $E(X)$ 為何?

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) 1

【解析】

$$E(X)=\int_0^1 xp(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\int_0^1 2x^2dx=[\frac{2}{3}x^3]\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$