99 年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：電力工程、電子工程、醫學工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）
㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、試利用拉氏轉換（Laplace transformation）求解：（15 分）

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ \frac{5}{2} & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

（其中 $x_i' \equiv \dfrac{dx_i}{dt}, i = 1,2$）。

一、設曲線 c 之參數表示式為 $x = \sqrt{3}t$，$y = \sin t$，$z = \cos t$ 求自 $(0,0,1)$ 到 $\left(\sqrt{3}\pi, 0, -1\right)$ 之線積分 $\int_c \left(x^2 + yz\right) ds$ 。（10 分）

二、令矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，

㈠求矩陣 $\mathbf{X}$ 使得 $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}$ 為一對角矩陣（diagonal matrix）。（7 分）

㈡求 $\mathbf{A}^{100} + 2\mathbf{A}^{101}$ 。（8 分）

三、試將函數 $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(1-z)}$ 在 $1<|z|<2$ 的範圍內，以勞倫茲級數（Laurent series）展開表示之。（10 分）

乙、測驗題部分：（50分） **代號：2304**

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

㈡共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 試問 $\int_0^{\infty}\frac{\sin 3t}{t}dt$ 之解爲何？

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

2 下列何者爲微分方程式 $y''+4y=8x^2$ 的一般解？以下選項中的 A、B 爲任意常數。

(A) $y=A\cos 2x+B\sin 2x+2x^2$
(B) $y=A\cos 2x+B\sin 2x+2x^2-1$
(C) $y=A\cos 2x+B\sin 2x+4x^2$
(D) $y=A\cos 2x+B\sin 2x+4x^2+1$

3 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transformation）爲 $L\{f(t)\}$，令 $L\{f(t)\}=\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$，則 $f(t)$ 可能爲何？

(A) $t\sin(2t)$ (B) $te^{-2t}\sin(2t)$ (C) $t\cos(2t)$ (D) $te^{-2t}\cos(3t)$

4 設微分方程式 $y''+ay'+by=0$，$y(0)=y_0$，$y'(0)=y_0'$ 的解 $y(t)$ 的拉氏轉換爲 $Y(s)=\frac{3}{s^2-4}$，試求常數 a、b、y_0 及 y_0' 之值，並判定下列何者正確？

(A) $a+b+y_0+y_0'=0$
(B) $a+b+y_0+y_0'=-1$
(C) $a+b+y_0+y_0'=-2$
(D) $a+b+y_0+y_0'=-3$

5 對於此微分方程式 $x^2y''-3xy'+3y=2x^4e^x$，下列何者錯誤？

(A)其解含有 x^3 項 (B)其解含有 xe^x 項 (C)其解含有 x^2e^x 項 (D)其解含有 x^2e^{2x} 項

6 複變函數 $f(z)=\frac{i-z^2}{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}$ 在 $z=\pi$ 的留數（residue）爲何？其中 $i=\sqrt{-1}$

(A) π^2-i (B) $2(\pi^2-i)$ (C) $i-\pi^2$ (D) $2(i-\pi^2)$

7 假設一複變函數 $f(z)=x^2-y^2-2y+i(2x-2xy)$，令複數 $z=x+iy$，而其共軛複數爲 $\bar{z}=x-iy$，試問此複變函數可以下列何種形式表示？

(A) z^2+2iz (B) $z^2-2i\bar{z}$ (C) $\bar{z}^2+2iz$ (D) $\bar{z}^2-2iz$

8 假設一複變函數 $f(z)=\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$，試問當 z 趨近於零時，$f(z)$ 之極限值（limit）爲何？

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D)不存在

9 若 $\mathbf{v}=x^2y\mathbf{i}-z^3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ ，$\nabla^2\mathbf{v}$ 等於：

(A) $2y\mathbf{i}+6z\mathbf{j}$ (B) $2y\mathbf{i}-6z\mathbf{j}$ (C) $-2y\mathbf{i}+6z\mathbf{j}$ (D) $-2y\mathbf{i}-6z\mathbf{j}$

10 若 A，B，C，D 之座標分別為(-1,2,2)，(0,1,1)，(-4,6,8)，(-3,-2,4)，則以 $\overline{AB}$ ，$\overline{AC}$ ，$\overline{AD}$ 為三邊之平行六面體的體積為：

(A) $\sqrt{12}$ (B) 12 (C) $\sqrt{18}$ (D) 18

11 讓 $\varphi(x,y,z)=xy-yz+xyz$ ，其在點 $P=(0,-1,1)$ 最陡變化方向（gradient）為何？

(A) $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (B) $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (C) $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (D) $-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

12 若矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}$ 及 $\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^6-3\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^4+13\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+13\mathbf{I}$

(A) $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\mathbf{I}$ (B) $\boldsymbol{A}+\mathbf{I}$ (C) $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\mathbf{I}$ (D) $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}$

13 令矩陣 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 6\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，則下列敘述何者錯誤？

(A)矩陣 **A** 的行列式值（determinant）為 6

(B)矩陣 **A** 有三個互異的特徵值，且其和為 6

(C)矩陣 **A** 為不可對角化（not diagonalizable）

(D)矩陣 **A** 的各個特徵向量互為線性獨立（linearly independent）

14 令矩陣 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，且已知 $(a-d)^2+4bc>0$ ，則下列敘述何者不恆真？

(A)矩陣 **A** 為可對角化（diagonalizable）

(B)矩陣 **A** 的各個特徵向量（eigenvector）互為線性獨立（linearly independent）

(C)矩陣 **A** 有二個相異的特徵值（eigenvalue），且其和為 $a+d$

(D)矩陣 **A** 有二個相異的特徵值（eigenvalue），且其積為 $ad+bc$

15 若矩陣 **A** 之特徵值（eigenvalue）為 0，-1，-2，令 **I** 表示單位矩陣，則 $\mathbf{A}(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}+2\mathbf{I})$ 之特徵值為何？

(A) 0，0，0 (B) 0，-1，-2 (C) 0，1，2 (D) 1，2，3

16 若$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{X}$均為非奇異方陣（non-singular matrix），且$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{BX})^{-1}=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{3})^{2}$，則$\mathbf{X}=$？

(A)$\mathbf{A}^{-4}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-3}$ (B)$\mathbf{B}^{-2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-3}$ (C)$\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-3}$ (D)$\mathbf{B}^{-4}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-3}$

17 兩連續隨機變數 X、Y 之結合機率密度函數（joint probability density function）為 $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求機率 $P(X+Y>1)=$？

(A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{6}$

18 隨機變數 X、Y 之結合機率 $P(X=x,Y=y)$ 如下表，則下列機率何者正確？

$P(X=x,Y=y)$		X		
		0	1	2
Y	0	$\frac{9}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{1}{24}$
	1	$\frac{6}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$

(A) $P(X<Y)=\frac{3}{8}$ (B) $P(X<Y)=\frac{2}{3}$ (C) $P(X>Y)=\frac{1}{3}$ (D) $P(X>Y)=\frac{1}{2}$

19 離散隨機變數 X 之機率為 $P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x=0\\ \frac{3}{4}, & x=2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，則期望值（expected value）$\mathrm{E}(4X+7)$ 為何？

(A) 12 (B) 13 (C) 15 (D) 17

20 若一系統由 2 項獨立（independent）運作之組件構成，在此 2 組件皆正常運作下該系統才可正常運作，已知此 2 項組件正常運作之機率分別為 0.8 及 0.4，試求此系統正常運作之機率：

(A) 0.12 (B) 0.32 (C) 0.68 (D) 0.88