98 年公務人員高等考試三級考試試題

代號：35320、35420、35520、37620　全一張（正面）

類　　科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程

科　　目：工程數學

考試時間：2 小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、試應用留數定理（Residue Theorem）計算下列積分$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$。（15 分）

二、㈠請用迴旋積分公式（convolution formula）求出 $H(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}$ 的反拉普拉斯轉換式（inverse Laplace transform）。（10 分）

㈡寫出 $\mathrm{g(t)}=\sin(wt+v)$ 的拉普拉斯轉換式（Laplace transform），其中w及v都是常數。（5 分）

三、考慮一錐面$\sum$，其定義為$\sum=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\le 4\right\}$。假設在$\sum$上的質量密度函數為$\rho(x,y,z)=x^2+y^2$，試計算其質心的座標$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$。（20 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　**代號：2304**

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1　下列何者不正確？
(A) $x^2y''+10x^2y'+5y=0$是尤拉－哥西（Euler-Cauchy）方程式
(B) $2xydx+x^2dy=0$是正合（Exact）方程式
(C) $y'+y\tan x=\sin 2x$是線性（linear）微分方程式
(D) $y'+3xy=y^3x^2$是白努利（Bernoulli）方程式

2　有一微分方程式$y''+y'-2y=0$，$y(0)=4$，$y'(0)=-5$，下列何者為其解？
(A) $y=e^x+3e^{2x}$　(B) $y=e^{-x}+3e^{2x}$　(C) $y=e^{-x}+3e^{-2x}$　(D) $y=e^x+3e^{-2x}$

3　下列何者不是線性（linear）微分方程式？
(A) $x^3y'+3x^2y=\frac{1}{x}$　(B) $x^2y'+2xy=\sinh 5x$　(C) $y'=1+y^2$　(D) $xy'=2y+x^3e^x$

4　下列何者不是微分方程式$\frac{d^2y}{dx^2}+y=1$的解？
(A) $y=1+\cos x$　(B) $y=1+\sin x$　(C) $y=2(1+\cos x)$　(D) $y=1$

5　設$\mathrm{F}=(\mathrm{z}-\frac{3}{2}\mathrm{y})\mathbf{i}+(\frac{3}{2}\mathrm{x}-\frac{1}{2}\mathrm{z})\mathbf{j}+(\frac{1}{2}\mathrm{y}-\mathrm{x})\mathbf{k}$，令旋度（curl）$\nabla\times\mathrm{F}=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}$，則$\alpha+\beta+\gamma$等於？
(A) 6　(B) 0　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) -3

6　令$\sigma(x,y,z)$為空間中某物體之密度分布，T為該物體所存在之領域（region），其對X軸之轉動慣量（moment of inertia）為$I_x=\iiint_T (y^2+z^2)\sigma(x,y,z)dxdydz$。今有一密度為 1 之圓柱體 T：$y^2+z^2\le a^2, 0\le x\le h$，其$I_x$為：
(A) $\frac{1}{4}\pi a^2h$　(B) $\frac{1}{2}\pi a^4h$　(C) $\frac{1}{8}\pi a^4h^2$　(D) $\frac{1}{4}\pi a^2h^2$

（請接背面）

類　　科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程
科　　目：工程數學

7 令矩陣 $A=\begin{pmatrix} 0 & b & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & c & -d \end{pmatrix}$，設 a, b, c, d 皆為正值，且 $A^TA=I$，則 $a+b+c+d$ 等於多少？

(A) $1+\frac{2}{\sqrt{5}}$　(B) $1+\frac{4}{\sqrt{5}}$　(C) 2　(D) $2+\frac{1}{\sqrt{5}}$

8 令 u 為 $\mathbb{R}^n$ 向量，則下列敘述何者錯誤？

(A) uu^T 為對稱矩陣　(B) uu^T 的秩（rank）為 1　(C) uu^T 恆可對角化　(D) uu^T 的特徵值恆大於 0

9 令向量 $\mathbf{x}=[1\ \ 1\ \ -2]^T$，下列何者正確？

(A) $\|\mathbf{x}\|_1=\sqrt{6}$，$\|\mathbf{x}\|_\infty=2$　(B) $\|\mathbf{x}\|_1=4$，$\|\mathbf{x}\|_\infty=\sqrt{6}$　(C) $\|\mathbf{x}\|_1=4$，$\|\mathbf{x}\|_\infty=2$　(D) $\|\mathbf{x}\|_1=2$，$\|\mathbf{x}\|_\infty=4$

10 試求當線性聯立方程式：$\begin{cases} x+y=3 \\ x+(a^2-8)y=a \end{cases}$，具有無窮多組解時，$a=$？

(A) $a=-3$　(B) $a=3$　(C) $a=\sqrt{3}$　(D) $a=\pm 2\sqrt{2}$

11 若 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換式（Laplace transform）為 $F(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)}$，試求 $\lim_{t\to\infty} f(t)$。

(A) 0　(B) $\frac{1}{2}$　(C) 1　(D) ∞

12 以下何者為 $\delta(t-a)*u(t+b)$ 之拉普拉斯轉換式（Laplace transform）？其中 $\delta(t)$ 為脈衝函數（impulse function）；$u(t)$ 為單步階函數（unit step function）。

(A) $\frac{e^{bs}e^{-as}}{s}$　(B) $\frac{e^{-bs}e^{as}}{s}$　(C) $\frac{e^{bs}e^{-as}}{s^2}$　(D) $\frac{e^{-bs}e^{as}}{s^2}$

13 已知週期為 1 的函數 $f(x)=\begin{cases} 20 & ,0<x<0.5 \\ -20 & ,0.5<x<1 \end{cases}$，欲將 $f(x)$ 展開成 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2n\pi x$，試問 b_n 為何？

(A) $\frac{40}{n\pi}(\cos n\pi)$　(B) $\frac{40}{n\pi}(-\cos n\pi)$　(C) $\frac{40}{n\pi}(1-\cos n\pi)$　(D) $\frac{40}{n\pi}(1+\cos n\pi)$

14 有一函數 $F(x)=\begin{cases} 1 & ,|x|<a \\ 0 & ,|x|>a \end{cases}$，求 $F(x)$ 的傅立葉轉換（Fourier transform）$\hat{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-iwx}dx=$？

(A) $2\frac{\sin wa}{w}$　(B) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin wa}{w}$　(C) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin wa}{w}$　(D) $\frac{\sin wa}{w}$

15 微分方程式 $x(1-x)y''+[c-(1+a+b)x]\,y'-aby=0$ 稱為 hyper-geometric 方程式，其中的 a, b, c 為常數。則 $x=0$ 是此方程式的什麼點？

(A)規則奇異點（regular singular point）　(B)不規則奇異點（irregular singular point）
(C)正常點（ordinary point）　(D)可解析點（analytic point）

16 令 z 為任一複數且 $z\neq 0$，則下列敘述何者為真？

(A) $\left|z+\frac{1}{z}\right|>\left||z|-\left|\frac{1}{z}\right|\right|$　(B) $|z|+\left|\frac{1}{z}\right|\geq 2$　(C) $\left|z+\frac{1}{z}\right|>|z|+\left|\frac{1}{z}\right|$　(D) $\left|e^{iz}\right|\leq 1$

17 令 $f(z)=(1-x)^3+i\,y^3$，其中 $z=x+i\,y$ 為複數（complex number），$f'(z)\triangleq\frac{d}{dz}f(z)$。則下列敘述何者正確？

(A)對於複數平面上任何一點 z，$f'(z)$ 皆不存在　(B)只有在 $z=1$ 時，$f'(z)$ 才存在
(C)除了 $z=1$ 之外，$f'(z)$ 皆存在　(D)只有在 $z=0$ 時，$f'(z)$ 才存在

18 若 $z_1=1-i,\ z_2=-2+4i,\ z_3=\sqrt{3}-2i$，則 $\left|z_1^2+\bar{z}_2^2\right|^2+\left|\bar{z}_3^2-z_2^2\right|^2=$？

(A) $760+100\sqrt{3}$　(B) $760+128\sqrt{3}$　(C) $765+100\sqrt{3}$　(D) $765+128\sqrt{3}$

19 設一隨機變數（random variable）X，其期望值（mean value）$E[X]=2$，均方差（variance）$\sigma_X^2=3$。令 $Y=2X+3$，則 σ_Y^2 之值為何？

(A) 27　(B) 21　(C) 12　(D) 6

20 在某一個車站，公車到站的時間是隨意分布在上午 10 點到 10 點 50 分之間。一個乘客在上午 9 點 55 分抵達車站，一直等到 10 點 10 分都沒有公車。從現在開始算，20 分鐘之內公車會到站的機率為何？

(A) 0.20　(B) 0.40　(C) 0.45　(D) 0.50