代號：35120
35220
37120
頁次：4－1

97 年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：電力工程、電子工程、醫學工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意： 禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、解微分方程式 $y''+2y'+y=e^{-t}\sin t$ ， $y(0)=1$ ， $y'(0)=0$ （10 分）

二、求解 $\int_0^{\infty}\frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}dx$ ，$a>0$，$b>0$。 （10 分）

三、考慮一實數數列 $\{G_n : n=1,2,3,...\}$，其中 G_{k+2} 是前兩項的算術平均數，即

$$G_{k+2}=\frac{1}{2}\left(G_{k+1}+G_k\right)$$ 。

㈠設定 $x_1(k)=G_{k+1}, x_2(k)=G_k$ ，將關係式 $G_{k+2}=\frac{1}{2}\left(G_{k+1}+G_k\right)$ 表示為矩陣方程式：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\mathbf{A}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$ ，試求 2×2 矩陣 $\mathbf{A}$。（5 分）

㈡試求 $\mathbf{A}^k$＝？ $\lim_{k\to\infty}\mathbf{A}^k$＝？（10 分）

四、令 X 和 Y 是兩個獨立的隨機變數，其機率密度函數（probability density function）分別表示為 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。令隨機變數 Z 定義如下： $Z=X+Y$

㈠證明隨機變數 Z 的機率密度函數 $f_Z(z)$ 和 $f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$ 間具有下面的關係

$$f_Z(z)=f_X(x)*f_Y(y)$$

其中“*”意指摺積（convolution operation）。 （5 分）

㈡假設 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 的表示式如下

$$f_X(x)=\frac{1}{a}[u(x)-u(x-a)]$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{b}[u(y)-u(y-b)]$$

其中 $0<a<b$，而 $u(\bullet)$ 代表單位步階函數（unit-step function）。求算隨機變數 Z 的機率密度函數 $f_Z(z)$，並繪圖表示之。 （10 分）

乙、測驗題部分：（50 分） **代號：2304**

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 利用變換變數 $v = x + 2y, z = x - 2y$ 可將偏微分方程式 $4u_{xx} - u_{yy} = 0$ 轉換為：（其中 $u_{xx} \triangleq \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ）

(A) $u_{vv} = 0$ (B) $u_{zz} = 0$ (C) $u_{vz} = 0$ (D) $u_{vv} + u_{zz} = 0$

2 下列那一個是 $\ln\left(-1 + \sqrt{3}i\right)$ 的解？

(A) $\ln 2 + i\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\ln 2 - i\dfrac{2\pi}{3}$ (C) $\ln 2 - i\dfrac{4\pi}{3}$ (D) $\ln 2 - i\dfrac{\pi}{3}$

3 $f(t)$是週期為 4 的函數，在 $-2 \le t < 2$ 之間定義為 $f(t) = t^2$。將 $f(t)$的傅利葉級數（Fourier series）表示成

$f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$，求 a_0 之值為何？

(A) $\dfrac{10}{3}$ (B) $\dfrac{8}{3}$ (C) $\dfrac{5}{3}$ (D) $\dfrac{4}{3}$

4 計算線積分 $\oint_C \left[(1+y)zdx + (1+z)xdy + (1+x)ydz\right]$，其中 C 表示一個三角形邊線，該三角形的頂點 $P_1(1,0,0)$，$P_2(0,1,0)$，$P_3(0,0,1)$，C 的方向從 P_1 到 P_2 到 P_3。

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 4

5 試求 $y'' - 3y' + 2y = e^x$ 之解，其中 c_1, c_2 為任意實數。

(A) $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ (B) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} - e^x$

(C) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x$ (D) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + e^x$

6 下列何者不是微分方程式 $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解的其中一項？

(A) e^{-x} (B) e^x (C) e^{2x} (D) e^{-2x}

7 定義函數 $f(t)$的傅利葉轉換（Fourier transform）為 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$，其中 $i = \sqrt{-1}$。求 $f(5t)$的傅利葉轉換為何？

(A) $5F(\dfrac{\omega}{5})$ (B) $\dfrac{1}{5}F(\dfrac{\omega}{5})$ (C) $5F(5\omega)$ (D) $\dfrac{1}{5}F(5\omega)$

8 二維隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數（joint probability density function）為

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1/15, & 0\le x\le 3, 0\le y\le 5\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

。則 XY 的期望值（mean）為何？

(A) 1　(B) 15/4　(C) 15/2　(D) 15

9 給定一個離散隨機變數（discrete random variable）X，它的機率質量函數（probability mass function）為

$$p(x)=\begin{cases}cx^2, & x=1,2,3,4\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

。則 X 為偶數的機率為何？

(A) 1/3　(B) 1/2　(C) 2/3　(D) 3/4

10 級數（series）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\frac{\pi}{4})^n}{n!}$ 之收斂半徑（radius of convergence）R 為何？

(A) $R=1$　(B) $R=\frac{\pi}{4}$　(C) $R=\frac{1}{e}$　(D) $R=\infty$

11 令 $f(t)=L^{-1}\left(\frac{se^{-3s}}{s^2+4}\right)$，則下列何者正確？

(A) $f(0)=1$　(B) $f(1)=\cos 4$　(C) $f(3)=1$　(D) $f(\pi)=0$

12 若一系統之轉移函數為 $s/(s+1)^2$，則此系統之脈衝響應（impulse response）為：

(A) $e^{-2t}-e^{-t}$　(B) $e^{-2t}-e^{-t}\sin t$　(C) $e^{-t}-te^{-t}$　(D) $e^{-2t}\sin t-e^{-t}$

13 若拉氏轉換（Laplace Transform）$Y(s)=1/(s+1)^4$，則 $L^{-1}[Y(s)]=y(t)=$？

(A) $y(t)=t^3/3!$　(B) $y(t)=t^3e^{-t}/3!$　(C) $y(t)=t^3e^{-t}$　(D) $y(t)=t^3e^{-t}/2!$

14 令 **A** 與 **B** 皆為 3x3 的矩陣（matrix），現已知 **A** 的行列式（determinant）值是 2，**B** 的行列式值是 5，且 $\Delta=3\mathbf{AB}$。則 Δ 的行列式值是：

(A) 30　(B) 90　(C) 180　(D) 270

15 下列敘述何者正確？

(A)如果矩陣 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$，則矩陣 $\mathbf{A}=\mathbf{0}$，或矩陣 $\mathbf{B}=\mathbf{0}$，或 $\mathbf{A}=\mathbf{B}=\mathbf{0}$

(B)如果矩陣 $\mathbf{A}\in R^{m\times n}$ 的第一列（row）與第三列相同，則矩陣 **AB** 的第一列與第三列也相同，其中 $\mathbf{B}\in R^{n\times p}$

(C)如果矩陣 $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$，矩陣 $\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$，矩陣 $\mathbf{C}\neq\mathbf{0}$，並且 $\mathbf{AC}=\mathbf{BC}$，則 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$

(D)如果矩陣 **A**，矩陣 **B** 皆為對稱矩陣（symmetric matrix），則 **AB** 也是對稱矩陣

16 令 X、Y、Z 與 W 皆是 R^3 的子空間（subspace）。X 是由向量 $e_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ 擴展而成，Y 是由向量 $\{[1,\ 0,\ 0]^T,\ [0,\ 1,\ 0]^T\}$ 擴展而成，Z 是由向量 $\{[0,\ 1,\ 0]^T,\ [0,\ 0,\ 1]^T\}$ 擴展而成，W 是由向量 $\{[1,\ 0,\ 0]^T,\ [0,\ 0,\ 1]^T\}$ 擴展而成。記號“⊥”表示垂直。下列何者正確？

(A) $X \perp Y$　(B) $X \perp Z$　(C) $Y \perp Z$　(D) $W \perp Y$

17 將函數 $f(t) = (\cos(5\pi t))^3$ 的複數傅利葉級數（complex Fourier series）表示成 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in5\pi t}$，其中 $i = \sqrt{-1}$。求 $e^{i5\pi t}$ 的係數 c_1 之值為何？

(A) $3i/8$　(B) $i/8$　(C) $1/8$　(D) $3/8$

18 有一個旋轉角錐體的表面方程式描述為 $z^2 - 5(x^2 + y^2) = 0$，求其表面上一點(1,2,5)的單位法向量為何？

(A) $\dfrac{-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{6}}$　(B) $\dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}$

(C) $\dfrac{\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{6}}$　(D) $\dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{6}}$

19 下列何者為微分方程式 $y' = (x - y + 1)^2 + x - y$ 之通解？其中 c 為任意實數。

(A) $y = 1 + x + (1 + 2ce^{-3x})/(1 - 3ce^{-3x})$　(B) $y = 1 + x + (1 + 2ce^{-3x})/(1 + 3ce^{-3x})$

(C) $y = 1 + x - (1 + 2ce^{-3x})/(1 - 3ce^{-3x})$　(D) $y = -1 + x + (1 + 2ce^{-3x})/(1 - 3ce^{-3x})$

20 現已知 $\oint_C \frac{e^{az}}{z} dz = i2\pi$，其中 C 表示單位圓（unit circle）$z = e^{i\theta}$，$(-\pi \le \theta \le \pi)$。請利用此結果來計算 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a \sin\theta) d\theta =$ ？

(A) 2π　(B) π　(C) 0　(D) $-\pi$