

類 科：天文

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、將下列矩陣分解成上三角矩陣  $L$  和下三角矩陣  $U$  的乘積，其中  $L$  的對角線都是 1。(20 分)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = LU$$

二、求常微分方程式  $y'''(x) + y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{-x} + 4x$  的通解，以實數函數表示。(20 分)

三、設曲線  $C$  為兩曲面  $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 20$  與  $x^2 + y^2 + z = 4$  之交線，求  $C$  上一點  $(0, 1, 3)$  之切線。(20 分)

四、使用重積分計算單位球的表面積。(20 分)

五、使用分離變數法求第一象限上偏微分方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$  的通解  $u(r, \theta)$ ，其中  $(r, \theta)$  為極座標，邊界條件  $u(r, 0) = u(r, \pi/2) = 0$ 。(20 分)  
提示： $u(r, \theta)$  在原點要有定義。