112年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：電力工程、電子工程、電信工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　座號：______________

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）
㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、求 $yy''=(y')^2$ 的通解（general solution）。（15分）

二、求 $\int_c \bar{z}dz$，其中 c 代表複數平面上逆時針方向繞一圈的單位圓（圓點為圓心且半徑為1的圓）。（10分）

三、求平面 $2x-y+2z=1$ 與平面 $x-y=2$ 之夾角 θ（$0\le\theta\le 90^0$）。（10分）

四、$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&0&2\\0&0&3\end{bmatrix}$，求特徵值（eigenvalues）與其對應的特徵向量（eigenvectors）。（15分）

乙、測驗題部分：（50分）　　　　代號：2373
㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。
㈡共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1　二階微分方程 $y''-y'-12y=2\sinh^2(x)$，初始值未知，試問其全解（通解加特解）為何？

(A) $C_1e^{4x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{6}(1-e^{-2x})-\frac{1}{12}e^{2x}$
(B) $C_1e^{4x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{12}(1-e^{-2x})-\frac{1}{20}e^{2x}$
(C) $C_1e^{4x}+C_2e^{-3x}+(\frac{1}{12}-\frac{1}{10}e^{-2x})-\frac{1}{6}e^{2x}$
(D) $C_1e^{4x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{12}e^{-2x}-\frac{1}{20}e^{2x}$

2　二階微分方程 $3y''+12y=2\tan(2x)$，試問其特解為何？

(A) $-\frac{1}{6}\sin(2x)\cdot ln\left|\sec(2x)+\tan(2x)\right|$
(B) $-\frac{1}{2}\sin(2x)\cdot ln\left|\csc(2x)+\cot(2x)\right|$
(C) $-\frac{1}{6}\cos(2x)\cdot ln\left|\csc(2x)+\tan(2x)\right|$
(D) $-\frac{1}{6}\cos(2x)\cdot ln\left|\sec(2x)+\tan(2x)\right|$

3　函數 $\mathrm{f(t)}=\mathrm{t}e^{-2t}sin\omega\mathrm{t}$，請問其經過拉式轉換（Laplace Transform）後為下列何者？

(A) $\mathrm{F(s)}=\frac{2(S+2)\omega}{[(S+2)^2+\omega^2]^2}$
(B) $\mathrm{F(s)}=\frac{2(S+2)}{[(S+2)^2+\omega^2]^2}$
(C) $\mathrm{F(s)}=\frac{(S+2)}{[(S+2)^2+\omega^2]^2}$
(D) $\mathrm{F(s)}=\frac{-2(S+2)\omega}{[(S+2)^2+\omega^2]^2}$

4 矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{bmatrix}$，試問 $A^{-1}=$？，$B^{-1}=$？

(A) $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix}-3.5 & 1 & -1.5\\ 5.5 & -1 & 1\\ 3.5 & -1 & -0.5\end{bmatrix}$

(B) $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix}-2.5 & 1 & -0.5\\ 5 & -1 & 1\\ 3.5 & -1 & 0.5\end{bmatrix}$

(C) $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix}-2.5 & 1 & -0.5\\ -1.5 & 1 & 1.5\\ 3.5 & -1 & 0.5\end{bmatrix}$

(D) $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2.5 & 1 & 1.5\\ 5 & -1 & 1\\ 2.5 & -1 & 0.5\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

5 若 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$，且 $f(x)=f(x+2)$。若 $f(x)$ 之傅立葉級數（Fourier Series）為 $f(x)=a_0\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\pi kx+b_k\sin\pi kx)$，下列何者為非？

(A) $a_0=\dfrac{1}{4}$　(B) $a_1=-\dfrac{2}{\pi^2}$　(C) $a_2=-\dfrac{1}{2\pi^2}$　(D) $a_3=-\dfrac{2}{9\pi^2}$

6 一組聯立方程式以 $A\bar{x}=B$ 的方式表示如下：

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & T^2-11\\ 4 & 1 & -2\\ 4 & 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T-2\\ 1\\ 6\end{bmatrix}$$

其中T為常數，若上式之增廣矩陣（augmented matrix）為C，又此一聯立方程式已知有無限多組解，試問rank(C)之最大值為何？T又為何？

(A)rank(C)之最大值為3，T=-3　(B)rank(C)之最大值為4，T=3

(C)rank(C)之最大值為2，T=-4　(D)rank(C)之最大值為2，T=3

7 兩向量分別為 $\vec{H}(t)=2\hat{i}+8t\hat{j}+t^2\hat{k}$，$\vec{G}(t)=-3t\hat{i}+2e^t\hat{j}+ln(t)\hat{k}$，請求出 $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{H}(t)\times\vec{G}(t)\right]=$？（其中 $\hat{i}$，$\hat{j}$，$\hat{k}$ 為三度空間R^3各座標軸之單位向量符號，亦即 $\hat{i}=(1,0,0)$，$\hat{j}=(0,1,0)$，$\hat{k}=(0,0,1)$）

(A) $\left[8(1+lnt)-(2t^2+4t)e^t\right]\hat{i}-(9t^2+\dfrac{2}{t})\hat{j}+(48t+4e^t)\hat{k}$

(B) $\left[(1+lnt)-(2t^2+4t)e^t\right]\hat{i}+(-9t^2+\dfrac{2}{t})\hat{j}+(48t+4e^t)\hat{k}$

(C) $\left[8(1+lnt)-(2t^2+4t)e^t\right]\hat{i}+(-9t^2+\dfrac{2}{t})\hat{j}+(24t+2e^t)\hat{k}$

(D) $\left[8(1-lnt)-(2t^2-4t)e^t\right]\hat{i}-(9t^2+\dfrac{2}{t})\hat{j}+(48t-4e^t)\hat{k}$

8 一曲線參數式為 $\mathrm{x}(t)=e^t\cos t$ ， $\mathrm{y}(t)=e^t\sin t$ ， $\mathrm{z}(t)=e^t$ ， $0\le t\le\pi$ ，其單位切線向量為何？（其中 $\hat{i}$ ， $\hat{j}$ ， $\hat{k}$ 為三度空間 R^3 之單位向量， $\hat{i}=(1,0,0)$ ， $\hat{j}=(0,1,0)$ ， $\hat{k}=(0,0,1)$ ）

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t-\sin t)\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t-\sin t)\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\,\hat{k}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t-\sin t)\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t+\sin t)\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\hat{k}$

9 利用梯度求解曲面φ： $xy^3z^2=4$ 在(-1, -1, 2)點之法向量的過程與結果，以下何者錯誤？（其中 $\hat{i}$ ， $\hat{j}$ ， $\hat{k}$ 為三度空間 R^3 之單位向量， $\hat{i}=(1,0,0)$ ， $\hat{j}=(0,1,0)$ ， $\hat{k}=(0,0,1)$ ）

(A) $\nabla\varphi=y^3z^2\hat{i}+3xy^2z^2\hat{j}+2xy^3z\hat{k}$

(B)曲面φ在點(-1, -1, 2)上之法向量為 $-4\hat{i}-12\hat{j}+4\hat{k}$

(C)曲面φ在點(-1, -1, 2)之單位法向量為 $\pm\frac{1}{\sqrt{11}}(-1\hat{i}-3\hat{j}+1\hat{k})$

(D) $8\hat{i}+24\hat{j}-24\hat{k}$ 為曲面φ在點(-1, -1, 2)之法向量

10 某大學111學年度第二學期工程數學某班共有男生6人，女生5人，期中考試成績如下：

男生：88, 77, 40, 58, 72, 92

女生：84, 60, 74, 50, 95

試求以男、女生做為區分條件時之標準差（standard deviation）各為何？（請選數值最接近者）

(A)男生：16.95；女生：15.78　(B)男生：17.78；女生：16.14

(C)男生：17.78；女生：15.78　(D)男生：16.95；女生：16.14

11 請利用柯西—里曼方程式（Cauchy-Riemann Equation）驗證下列何者非可解析函數（non-analytic function）？（其中Z為複數）

(A) $\mathrm{f(z)}=|z|$　(B) $\mathrm{f(z)}=\sin z$　(C) $\mathrm{f(z)}=z^2+2z-1$　(D) $\mathrm{f(z)}=e^z$

12 矩陣A= $\begin{bmatrix}1&2&1&2&1\\0&2&3&3&2\\0&0&3&1&2\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&4\end{bmatrix}$ ，B= $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\2&2&0&0&0\\3&1&3&0&0\\1&2&1&4&0\\2&1&1&1&1\end{bmatrix}$ ，試問行列式det(AB)=？

(A)0　(B)576　(C)22　(D)121

13 定義 $i=\sqrt{-1}$ ，求 $(1+i)^{12}$ 的運算結果為何？

(A)-64 (B)-128 (C)-512 (D)-256

14 函數 $f(t)$ 經拉式轉換後為 $\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{S-1}{(S+3)(S^2+2S+2)}$ ，試問 $f(t)$ 應為？

(A) $-\frac{4}{5}e^{-3t}-e^{-t}(\frac{3}{5}\sin t-\frac{4}{5}\cos t)$ (B) $-\frac{4}{5}e^{-3t}-e^{t}(\frac{3}{5}\sin t-\frac{4}{5}\cos t)$

(C) $\frac{4}{5}e^{-3t}-e^{-t}(\frac{4}{5}\sin t+\frac{4}{5}\cos t)$ (D) $-\frac{4}{5}e^{-3t}-e^{t}(\frac{4}{5}\sin t-\frac{3}{5}\cos t)$

15 若 $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & -2\\ 1 & 5 & 3 & -5\\ 2 & -7 & 6 & 4\\ -1 & 3 & 2 & -2\end{bmatrix}$ 且 $B=A^{-1}$，請問行列式 $\det(B^2)$ 為下列何者？

(A)1/900 (B)1/700 (C)1/500 (D)1/300

16 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ 具有特徵向量 $\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$，請問下列何者可為其對角化(Diagonalization)矩陣？

(A) $\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

17 方程式 $e^x y'=2(x+1)y^2,\ y(0)=1/6$ 之解為下列何者？

(A) $y=\dfrac{1}{(2x+4)e^{-x}+2}$ (B) $y=\dfrac{-1}{(2x-4)e^{-x}-2}$ (C) $y=\dfrac{1}{(-2x+4)e^{-x}+2}$ (D) $y=\dfrac{1}{(2x+4)e^{x}+2}$

18 求 $\frac{1}{s^2}(\frac{s-1}{s+1})$ 之反拉式轉換（Inverse Laplace Transform）為下列何者？

(A) $-2e^{-t}+t+2$ (B) $-2e^{-t}-t+2$ (C) $-2e^{-t}+t-2$ (D) $-2e^{-t}-t-2$

19 求 $\cosh(at)\cos(at)$ 之拉式轉換為下列何者？（其中a為實數）

(A) $\dfrac{2a^2s}{s^4+4a^4}$ (B) $\dfrac{2a^2+s^2}{s^4+4a^4}$ (C) $\dfrac{s^2-2a^2}{s^4+4a^4}$ (D) $\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$

20 已知 $f(t)=\dfrac{\sin 8t}{t}$ ，$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j5t}dt$ 之值為下列何者？（ $j=\sqrt{-1}$ ）

(A) $j\pi$ (B) $j\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π