

類 科：天文、氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、求  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$  的條件使得下列線性方程組(一)有唯一解，(二)有無窮多解，(三)無解。(20分)

$$\begin{cases} 2x + y + dz = c \\ x + z = b \\ x + y + 2z = a \end{cases}$$

二、求解微分方程式  $y'(x) = \frac{y(x)}{e^{-2y(x)} - 2xy(x)}$  的非零通解。(20分)

三、設  $\vec{F}$  及  $\vec{G}$  為三維向量場，計算下列含梯度和旋度的數學式  $\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) - \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G})$ ，並化至最簡式。(20分)

四、求曲面  $x^2 + y^2 + z = 1$  和  $y + z = 1$  平面所夾有限立體區域的體積。(20分)

五、求帕松 (Poisson) 偏微分方程  $\Delta u(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$  的所有徑向 (radial) 解  $u(r)$ ，其中  $c > 0$  為常數， $(r, \theta)$  為極坐標，

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (20分)$$