111年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、我們考慮空間中的三個向量：$\vec{a}=(-3,-2,1)$、$\vec{b}=(2,4,-5)$、$\vec{c}=(-1,-1,3)$。（每小題6分，共12分）

㈠請計算$\vec{a}$、$\vec{b}$所圍出的平行四邊形的面積。

㈡請計算$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$所圍出的平行六面體的體積。

二、考慮如下所示之初始值問題（initial-value problem）：$\left(y'=\dfrac{dy}{dx},\ y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$

$$\begin{cases}\text{微分方程式：} y''+3y'+2y=x \\ \text{初始條件：} y(0)=0、y'(0)=0\end{cases}$$

（每小題7分，共14分）

㈠請求出本題目中之微分方程式的齊次解（homogeneous solution），該齊次解應為一般形式（general form）解。

㈡請求出本初始值問題的精確解（exact solution）。

三、我們準備從一疊標準的撲克牌[共52張牌，沒有鬼牌（Joker）]裡面來隨機抽牌。（每小題6分，共12分）

㈠假設我們的抽牌方式是：抽牌看了結果以後會把牌再放回原來那疊撲克牌裡面；在這種情況之下，我們會剛好在第6次抽牌的時候首度抽到王牌（ACE）的機率為何？

㈡假設我們的抽牌方式是：抽牌看了結果以後不會把牌放回原來那疊撲克牌裡面（也就是會把牌往旁邊擺）；在這種情況之下，我們會剛好在第6次抽牌的時候首度抽到王牌（ACE）的機率為何？

四、在本題目中，我們考慮複變函數（complex-valued function）沿著曲線（contour）做積分（integral）的問題。我們用Γ代表在複數平面上的單位圓（也就是以座標系的原點為圓心而且半徑為 1 的圓）之中從$1+i\cdot 0 (i=\sqrt{-1})$以逆時針方向繞一圈走回到原出發點的曲線。請計算下列兩個積分的結果。（每小題 6 分，共 12 分）

㈠$\int_{\Gamma} z\,dz = ?$

㈡$\int_{\Gamma} \frac{1}{z}\,dz = ?$

乙、測驗題部分：（50 分）　　代號：2370

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案。

㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 假設 A 與 B 為維度相同之方陣（square matrix）且 $A,\ B,\ A+B$ 均為可逆（invertible）矩陣，則下列何者不一定為可逆矩陣？

(A) $A^T B$　(B) $I+AB$　(C) $I+A^{-1}B$　(D) $I+AB^{-1}$

2 假設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&2&6\\0&7&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-3&0\\-2&4&1\\5&-2&2\end{bmatrix}$，則行列式值 $\det\left(2A^T B^{-1}\right)$ 為何？

(A) $\frac{12}{17}$　(B) $-\frac{12}{17}$　(C) $-\frac{48}{17}$　(D) $\frac{48}{17}$

3 若 $P_{B\to B'}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&3\\1&1&0\end{bmatrix}$ 為從 R^3 的基底 B 轉換至基底 $B'=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ 之轉移矩陣（transition matrix），則 $B=$？

(A) $\{(3,2,2),(2,1,0),(4,4,1)\}$　(B) $\{(3,4,2),(2,1,2),(2,0,1)\}$

(C) $\{(3,1,2),(1,2,1),(4,1,4)\}$　(D) $\{(3,2,1),(1,2,0),(2,1,0)\}$

4 下列那一個矩陣無法被對角化（diagonalizable）？

(A) $\begin{bmatrix}4&0&1\\-2&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&5&-1\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}4&0&-1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{bmatrix}$

5 下列那一組 R^3 中之向量基於歐幾里得內積（Euclidean inner product）可作為規格化正交基底（orthonormal basis）？

(A) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$，$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

(D) $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

6 設 T 是 R^3 到 R^2 的線性轉換，$T\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$，$T\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$，$T\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$T\left[\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，下列何者正確？

(A) $a-b=8$　(B) $a-b=10$　(C) $a+b=10$　(D) $a+b=8$

7 矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 2 & 4\\-2 & 4 & 2 & -1\\6 & -2 & 4 & 14\end{bmatrix}$ 的 LU 分解（LU decomposition），可化為 $\begin{bmatrix}2 & -2 & 2 & 4\\0 & 2 & 4 & 3\\0 & 0 & -10 & -2x\end{bmatrix}$，x = ？

(A) $x=1$　(B) $x=2$　(C) $x=3$　(D) $x=4$

8 設 α 和 β 為矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 0\end{bmatrix}$ 之特徵值（eigenvalues），則 $\alpha\beta+\alpha+\beta=$ ？

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

9 定義 $i=\sqrt{-1}$，若 $z=a+bi$ 為 $z^2-(6-2i)z+17-6i=0$ 之一解，且 $ab>0$，則 $a^2+b^2=?$

(A) 13　(B) 15　(C) 18　(D) 20

10 定義 $i=\sqrt{-1}$，複變數 $z=x+iy$ 與其共軛複數 $\overline{z}=x-iy$。下列那一個複變函數為完整（entire），即在整個複數平面皆為可解析（analytic）？

(A) $f(z)=iz\overline{z}$　(B) $f(z)=x^2+y^2+i2xy$

(C) $f(z)=e^{-x}(\cos y-i\sin y)$　(D) $f(z)=\overline{z}$

11 複變級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^n}$ 之收斂半徑（radius of convergence）為何？$\left(i=\sqrt{-1}\right)$

(A) 1　(B) ∞　(C) 0　(D) $\frac{1}{2}$

12 計算 $\int_{\gamma} \bar{z}dz =$ ？其中軌跡 $\gamma(t) = e^{it}$， $0 \le t \le \pi$ 。$\left(i = \sqrt{-1}\right)$

(A) $-\pi i$　(B) πi　(C) $-2\pi i$　(D) $2\pi i$

13 一階常微分方程式 $e^{x+y}y' = 3x$ ，下列何者為正確的解答？$\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$

(A) $e^{-y} = -3e^{-x}\left(x+1\right)+c$ ，其中 c 為常數　(B) $e^{y} = -3e^{x}\left(x+2\right)+c$ ，其中 c 為常數
(C) $e^{y} = -3e^{-x}\left(x+1\right)+c$ ，其中 c 為常數　(D) $e^{-y} = -3e^{-x}\left(x+2\right)+c$ ，其中 c 為常數

14 二階微分方程式 $x^2y''-9xy'+24y=0,\ y\left(1\right)=1,\ y'\left(1\right)=10$ ，設 $y = \mathrm{a}x^6+\mathrm{b}x^5+\mathrm{c}x^4+\mathrm{d}x^3$ 為其解，下列何者正確？$\left(y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$

(A) $\mathrm{a}=1$　(B) $\mathrm{b}=-1$　(C) $\mathrm{c}=-2$　(D) $\mathrm{d}=-4$

15 反拉普拉斯轉換（inverse Laplace transform）$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-3}{s^2+2s+2}+\dfrac{s}{s^2+2s+1}\right\} = e^{-t}(\mathrm{a}\cos t+\mathrm{b}\sin t+\mathrm{c}t+\mathrm{d})$，a, b, c, d 為常數，則：

(A) $\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d}=-3$　(B) $\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d}=-4$　(C) $\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d}=3$　(D) $\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d}=4$

16 假設 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-1)^2}\right\}$，其中 $\mathcal{L}^{-1}$ 為反拉普拉斯轉換（inverse Laplace transform），下列何者正確？

(A) $f(0)=-1$　(B) $f(0)=1$　(C) $f(1)=-1$　(D) $f(1)=1$

17 定義傅立葉轉換 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ ，令 $f(x) = \begin{cases} 5 & ,-3 \le x \le 3 \\ 0 & ,x<-3 \text{或} x>3 \end{cases}$ ，$F(\omega) =$ ？$\left(i = \sqrt{-1}\right)$

(A) $\dfrac{6}{\omega}\sin(5\omega)$　(B) $\dfrac{6}{\omega}\cos(5\omega)$　(C) $\dfrac{10}{\omega}\sin(3\omega)$　(D) $\dfrac{10}{\omega}\cos(3\omega)$

18 若 X 為一連續均勻分布（uniformly distributed）在區間 $(0,\ 20)$ 之隨機變數，可計算得知 $X<10$ 之機率為 a， $X>12$ 之機率為 b，$8<X<16$ 之機率為 c，則 $a+b+c=$ ？

(A) $\dfrac{11}{10}$　(B) $\dfrac{6}{5}$　(C) $\dfrac{13}{10}$　(D) $\dfrac{7}{5}$

19 將一副正常的撲克牌（52 張牌包含四種花色：黑桃、方塊、紅心、梅花，每種花色各 13 張牌，ACE 為各花色點數 1 的牌）隨機均分為 4 疊，每疊各 13 張牌。這四疊牌每疊恰好包含一張 ACE 牌的機率為何？

(A) $\dfrac{1}{13}$　(B) $\dfrac{927}{2550}$　(C) $\dfrac{783}{2450}$　(D) $\dfrac{2197}{20825}$

20 設 X 和 Y 為連續隨機變數，其聯合機率密度函數（joint probability density function）$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & ,0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$ ，令 $\mathrm{W} = \mathrm{Y/X}$ ，期望值 $E(W) =$ ？

(A) 1/2　(B) 1　(C) 3/2　(D) 2