代號：37620
｜
37820
頁次：4－1

110年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：電力工程、電子工程、電信工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　　　　　　　　　　　座號：______________

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）
㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目得以本國文字或英文作答。

一、求 $y''+8xy'+16y=1+e^{-4x}$ 的通解（general solution）。（15 分）

二、求 $\int_{\varphi} z^2 dz$，其中 $\varphi=t+i2t$，$0\le t\le 1$。（10 分）

三、一副標準 52 張的撲克牌，隨意抽出 3 張。求其為同花（3 張為同一花色）的機率。（5 分）

四、$A=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$，
㈠求其行列式值（determinant）。（5 分）
㈡求特徵值（eigenvalues）與其對應的特徵向量（eigenvectors）。（10 分）
㈢求 P，使 $P^{-1}AP$ 為 A 之對角化（diagonalized）矩陣。（5 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　　　　　　　　　　代號：2376
㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 2×2 實數矩陣 Q 的特徵值為 -2、-3。若定義矩陣跡（trace）為對角線元素相加，則 Q 的跡（trace）為何值？
(A) -5　(B) -3　(C) -2　(D) 5

2 令 T 和 S 為 R^3 映射至 R^2 的線性轉換（linear transformation），其中 $T(x,y,z)=(x-y,z+y)$，$S(x,y,z)=(x+z,x+y)$。下列向量何者屬於 $T+S$ 的零空間（nullspace）？
(A) $(6,2,-10)$　(B) $(3,2,-5)$　(C) $(3,-2,5)$　(D) $(-6,-2,-10)$

3 給定矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 10 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 2 \end{bmatrix}$。則矩陣 ABC^{-1} 的行列式值為何？
(A) -6　(B) -0.75　(C) 0.25　(D) 0.75

4 考慮如下所示之過度限制（over-determined）線性聯立方程式：

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=-1 \\ x+3y=2 \\ x+4y=7 \end{cases}$$

如果這個聯立方程式的最小平方誤差解（least-squared-error solution）為 $x=\alpha$, $y=\beta$，那麼在下列敘述之中，何者為正確？

(A) $\alpha > \beta$　(B) $\alpha^2 > \beta$　(C) $\alpha+\beta > \alpha\cdot\beta$　(D) $3\alpha+2\beta > 0$

5 考慮一個作用在 $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ 的線性轉換（linear transformation）T。已知 $T(1,-1)=(3,2)$、$T(1,1)=(1,-5)$。若是 S 表示 T 的反轉換（inverse transformation），而且 $S(2,-7)=(p,q)$，那麼 p+q 與下列那一個數值最接近（也就是說差值的絕對值最小）？

(A)3　(B)4　(C)5　(D)6

6 考慮如下所示之線性聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x_1+0x_2+0x_3-3x_4=1 \\ 0x_1+5x_2+\alpha x_3+0x_4=-7 \\ 1x_1+6x_2+2x_3+0x_4=13 \\ 0x_1+1x_2-2x_3+3x_4=-2 \end{cases}$$

若是已知此聯立方程式無解，那麼在下列有關於 α 之敘述，何者正確？

(A) $-\infty < \alpha \leq -5$　(B) $-5 < \alpha \leq 0$　(C) $0 < \alpha \leq 5$　(D) $5 < \alpha < \infty$

7 我們考慮一個矩陣：$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & x & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，若已知此矩陣為不可逆（not invertible），那麼請問 x 的數值為何？

(A) -3　(B)12　(C) $2\sqrt{3}$　(D)4

8 有一條三維空間中的曲線，曲線上的點的坐標(x,y,z)以參數式來表示為：x(t)=2sin(t)、y(t)=2cos(t)、z(t)=5t。請問此曲線在(0,2,0)到 $\left(\sqrt{3},1,5\cdot\frac{\pi}{3}\right)$ 這個區間內的長度與下列那一個數值最接近（也就是說差值的絕對值最小）？

(A)2　(B)4　(C)6　(D)8

9 如果$3e^{i\pi/3}+5e^{-i\pi/4}+2e^{i\pi}=x+iy\quad\left(i=\sqrt{-1}\right)$，那麼下列有關於 x、y 之敘述，何者正確？

(A)$x\cdot y<0$　(B)$x+y<0$

(C)$|x|<|y|$（$|x|,|y|$分別代表 x 與 y 之絕對值）　(D)$x-y<x+y$

10 令 i 為單位虛數，則$\sin(\pi+i)$的實部（real part）為何？

(A)π　(B)1　(C)-1　(D)0

11 若積分路徑 C 為逆時鐘方向且滿足$|z|=1$，則複變函數積分$\oint_C 3\dfrac{4z^2+z+2}{z(4z^2-17z+4)}dz$之值為何？

(A)πi　(B)$-\pi i$　(C)$-2\pi i$　(D)$-13\pi i$

12 我們考慮複變函數$f(z)=z^2+1\quad(z=x+iy)$沿著曲線 Γ 作線積分（line integral），其中 Γ 代表在複數平面上由$y=x^2$來描述的曲線；我們的積分範圍是從 0+i0 到 1+i1。我們用 α+iβ 來代表這一個線積分的結果，此結果可以看成複數平面上的一個點。若是採用這個觀點，那麼 α+iβ 與下列複數平面上的四個點之中的那一個最接近（也就是距離最小）？

(A)0+i0　(B)1+i1　(C)1+i0　(D)0+i1

13 考慮如下所示之初始值問題（initial-value problem）：

$$y''-x^2y'-3xy=0\,;\,y(0)=1,\,y'(0)=-2$$

如果我們將解（solution）寫成冪級數（power series）型式：

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

那麼，下列選項何者正確？（可以試著套用函數的泰勒級數展開表示法（Taylor-series expansion）。）

(A)$a_0=2$　(B)$a_1=\dfrac{1}{3}$　(C)$a_2=\dfrac{3}{2}$　(D)$a_3=\dfrac{1}{2}$

14 假設 y(x)可以由下列微分方程來描述：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-1}{2y+5}$$

而且合乎初始條件：$y(1)=-1$。請問 y(0)=？

(A)-2 或-3 或 5　(B)2　(C)-4 或-1　(D)3 或 4

15 下列選項之中，何者屬於線性（linear）微分方程式？

(A) $y''(t)+t^2 \cdot y'(t)+\cos(t)\cdot\left(y(t)\right)^2=0$　(B) $y''(t)+2y'(t)+e^{-t}\cdot y(t)=\sin(2t)$

(C) $y(t)\cdot y''(t)+t^2\cdot y'(t)+\cos(t)\cdot y(t)=0$　(D) $y''(t)+2t\cdot y'(t)+e^{-t}\cdot y(t)=\sqrt{y(t)}$

16 給定微分方程式 $\frac{dy}{dt}+2y=t\delta(t-2)$，初始值為 $y(0)=0$，$\delta(t)$ 為脈衝函數（impulse function）。則 $y(t)$ 的拉氏轉換（Laplace transform）為何？

(A) $\frac{2}{s+2}e^{-2s}$　(B) $\frac{1}{s^2(s+2)}e^{-2s}$　(C) $\frac{s^2}{s^2(s+2)}e^{-2s}$　(D) $\frac{2s^2}{s^2(s+2)}e^{-2s}$

17 考慮微分方程式 $y''+5y'+6y=x$，初始值為 $y(0)=A$ 和 $y'(0)=B$。若其解為 $y=\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{6}x+C$，則 $A+B+C$ 為下列何值？

(A)2　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{1}{18}$　(D) $\frac{1}{36}$

18 有兩位桌球選手，根據以往的經驗，在每一局的比賽之中兩人的勝率比例為 6 比 4。如果他們進行一場五戰三勝的比賽（也就是搶先贏得三局的選手為整場比賽的勝利者），那麼請問這場比賽會剛好在打完第四局的時候分出勝負的機率為何？

(A) $\frac{75}{625}$　(B) $\frac{162}{625}$　(C) $\frac{234}{625}$　(D) $\frac{375}{625}$

19 有兩個隨機變數 X 與 Y，我們以 $P_{XY}(x,y)=Prob(X=x,Y=y)$ 來代表其合併機率函數（joint probability function），且其值如下所示：$P_{XY}(1,1)=0.07$、$P_{XY}(1,2)=0.09$、$P_{XY}(1,3)=0.12$、$P_{XY}(2,1)=0.25$、$P_{XY}(2,2)=0.07$、$P_{XY}(2,3)=0.18$、$P_{XY}(3,1)=0.06$、$P_{XY}(3,2)=0.07$、$P_{XY}(3,3)=0.09$。請計算下列條件機率之值：$Prob(Y=3|X=2)=$？

(A)0.25　(B)0.36　(C)0.60　(D)0.84

20 設 X 為一連續隨機變數（random variable），機率密度函數（probability density function）為常態分布（normal distribution），平均值為 45，標準差為 15。若欲將 X 轉換為 Y，其機率密度函數仍為常態分布，平均值為 65，標準差為 10。則 X 與 Y 的關係式為下列何者？

(A) $Y=\frac{1}{3}X+50$　(B) $Y=\frac{2}{3}X+35$　(C) $Y=\frac{2}{5}X+47$　(D) $Y=X+20$