

類 科：工業工程
科 目：作業研究
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、製造商要生產4個產品：1,2,3,4。令 C_j 為產品 j 的價格，分別為 $C_1=40, C_2=60, C_3=20, C_4=100$ 。這4個產品需要在4個工廠加工。令 b_i 為工廠 i 可用的資源，分別為 $b_1=30, b_2=20, b_3=40, b_4=60$ 。令 x_j 為產品 j 所生產的數目（可為實數），製造商想最大化總價格收入。此最佳化問題的線性規劃模式如下：

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 40x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 100x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 30 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 20 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60 \end{aligned}$$

令 x_5, x_6, x_7, x_8 為相對於限制式的鬆弛（slack）變數。加入之後的式子如下：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 30 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_7 &= 40 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_8 &= 60 \end{aligned}$$

已知經由simplex方法解出的最佳解為

$$x_1 = 0, x_2 = 10, x_3 = 0, x_4 = 10$$

- (一)請求出4個資源分別的影子價格（Shadow Prices）。（10分）
- (二)如果現在是以最佳解的方式生產，如果資源1增加1，新的最佳解的總價格收入會增加多少？為什麼？（5分）
- (三)如果現在是以最佳解的方式生產，如果我們要加購資源2，最高購買價格不能超過多少？為什麼？（5分）
- (四)如果現在是以最佳解的方式生產，第3個產品的價格要由20增至多少，製造商才要開始生產第3個產品？（5分）

(五)如果現在是以最佳解的方式生產，求這4個產品價格分別的可允許範圍 (Allowable Range)，相關計算可能需要參考如下的反矩陣：(5分)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

(六)如果現在是以最佳解的方式生產，當產品1的價格增至50，產品2的價格增至70，請問最佳解是否會改變？為什麼？(5分)

二、有一商家賣新的熱銷手機，商家每日開始營業時，庫存只可存放最多S支手機於店內。當日結束營業後檢查手機庫存量，如果庫存少於或等於s支手機，商家就會向通路商補貨。通路商只會供應R1或R2兩種供貨數量。也由於手機熱銷，顧客當日來店，若手機當日銷售完，會留下資料，該筆需求成為欠單需求。商家會於補貨日時補足該欠單。補貨時，是以要補足欠單數量(如果有的話)，同時也要補足S支庫存，或在無法補足時，儘量補足庫存的方式決定補貨R1或R2的手機量。補貨之手機於次日開始營業前會補足欠單量並送達商家成為店內之庫存。令D表示每日的需求量，其機率分布如下 $P(D=0)=1/3$, $P(D=1)=1/3$, $P(D=2)=1/3$ 。若以馬可夫鍊 (Markov Chain) 建模分析此系統並以每日結束營業後檢查庫存量當作狀態 (state)。系統的參數為 $S=2$, $s=0$, $R1=1$, $R2=3$

(一)寫出狀態空間 (state space)，那些狀態 (state) 要補R1量的貨？那些狀態 (state) 要補R2量的貨？(10分)

(二)寫出機率轉換 (transition) 矩陣。(5分)

(三)求出穩態 (steady-state) 機率。(5分)

(四)在系統穩定下，任何一天會發生欠單之機率為何？當這天發生欠單，平均隔幾天會再發生欠單？(5分)

三、某公司有3種客製產品（產品1,2,3）需要在7天依序完成，其中每一產品都至少分配1天生產，而第2個產品則至少要2天，另外第3個產品最多只能分配3天生產。每個產品所需之製造成本與所投入總天數有關，完成天數越少所需投入的成本則越多。下表為各個產品相對不同完成天數與成本的對應表。該公司想利用動態規劃決定3種客製產品所投入之天數以使總成本最低。

天數	生產成本		
	客製產品		
	1	2	3
1	40	NA (不可行)	90
2	35	50	60
3	30	30	50
4	15	20	NA (不可行)

(一)請定義階段 (stage)、狀態 (state) 與決定 (decision)。(5分)

(二)請以動態規劃的方式求解最佳解並以決策樹表示。(15分)

四、製造商只生產單一產品且採用訂單式生產方式：收到顧客訂單（顧客下單）才開始生產。每個訂單只要求1單位產品，訂單到達時間間隔呈現指數分配，平均到達時間間隔為2.5天，且到達時間間隔互相獨立。製造商工作機台以訂單先到先服務的方式生產產品，工作機台每次生產1單位產品，生產1單位的時間為指數分布且相互獨立，平均5天可生產6單位產品。製造商現在只有1台工作機台。(每小題5分，共20分)

(一)客戶所關心的是從訂單下單到拿到貨的時間間隔，稱之為回應時間。請問有多少比例的客戶回應時間在2天內？

(二)客戶所關心的是訂單下單到工作機台開始生產該產品的時間間隔，請問有多少比例的客戶訂單在下單之後1天內可開始生產？

(三)如果要滿足客戶的訂單在下單之後1天內可開始生產的比例要至少99%，製造商先嘗試加1台工作機台，訂單仍是先（下單）到先服務的方式由空閒的機台生產產品。請問在此系統，有多少比例，訂單下單後不能馬上生產而要等候空閒的機台？

(四)接續(三)，請問增加1台工作機台後有多少比例客戶的訂單在下單之後1天內可開始生產？