代號：26620-26820
29420
頁次：3－1

108年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　　　　　　　　　　　　座號：______________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、空間上有 $a=(1,1,1)$，$b=(3,4,5)$，$c=(2,3,4)$，$d=(1,2,2)$四點，求$\overrightarrow{ab}$，$\overrightarrow{ac}$和$\overrightarrow{ad}$三個向量作為三邊所組成平行四邊體的體積？（10 分）

二、假設路徑C是一逆時針的正方形邊界，其各邊位於直線$x=\pm 2$和$y=\pm 2$之上。請求出下列積分值：

㈠$\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}dz$　（7 分）

㈡$\int_C \frac{\cosh z}{z^4}dz$　（8 分）

三、利用積分因子，解微分方程式$2\sin\left(y^2\right)dx + xy\cos\left(y^2\right)dy = 0,\ y(2)=\sqrt{\pi/2}$之解。（15 分）

四、設矩陣$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

㈠求 A 的特徵值（eigenvalues）（5 分）
㈡求 A 的特徵向量（eigenvectors）（5 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　　　　　　　　　　　　代號：2266

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共20 題，每題2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1　V 及 W 是有限維度的空間向量，T 為 $V\to W$ 的函數，下列敘述何者正確？
(A)若 $T(x+y) = T(x)+T(y)$，則 T 為線性變換
(B) T 為一對一函數，若且唯若 $N(T) = \{0\}$，其中 $N(T)$為 T 的 Null space
(C)若 T 為線性變換，則 $nullity(T) + rank(T) = dim(V)$
(D)若 $x_1, x_2 \in V$ ，$y_1, y_2 \in W$ ，則必定存在一線性變換 T:$V\to W$ 使得$T(x_1)=y_1$及$T(x_2)=y_2$

2 試決定下列各個線性變換 T，何者不是一對一線性變換？

(A) $T:R^2\to R^2,\ T(x,y)=(y,x)$ (B) $T:R^2\to R^2,\ T(x,y)=(x+y,x-y)$

(C) $T:R^2\to R^3,\ T(x,y)=(x,y,x+y)$ (D) $T:R^2\to R^3,\ T(x,y)=(x-y,y-x,2x-2y)$

3 矩陣$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&3&5&7\\2&4&6&8\end{bmatrix}$，試問 Rank($A^TB$)為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4 求$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}^{100}=?$

(A) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

5 線性轉換 $L: R^3\to R^3$，$L(x,y,z) = (2x+3y+z,3x+3y+z,2x+4y+z)$，試求其逆轉換為何？

(A) $L^{-1}(x,y,z) = (-x+y,-x+z,6x-2y-3z)$

(B) $L^{-1}(x,y,z) = (-2x-3y-z,-3x-3y-z,-2x-4y-z)$

(C) $L^{-1}(x,y,z) = (0.5x+0.3y+z,0.3x+0.3y+z,0.5x+0.25y+z)$

(D) $L^{-1}(x,y,z) = (2x+y+z,x+3y+z,x+4y+z)$

6 下列何者不是矩陣$\begin{bmatrix}5&32&17\\0&12&2\\0&-2&7\end{bmatrix}$的特徵值？

(A) 5 (B) 8 (C) 11 (D) 14

7 給定一複數函數為 $f(z)=r^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)+ir^{\frac{1}{3}}\sin\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)$，其中 $z=x+yi=re^{i\theta}$，請問在$\pi<\theta\le 3\pi$範圍內，$f(1+i)=?$

(A) $\sqrt[6]{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}$ (B) $\sqrt[6]{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}$ (C) $\sqrt[6]{2}e^{\frac{17}{12}i\pi}$ (D) $\sqrt[6]{2}e^{-\frac{17}{12}i\pi}$

8 曲線 $C: y=x^2$，從(0,0)到(2,4)，求$\int_C z^2dz=?$

(A) $-\frac{88}{3}-\frac{16}{3}i$ (B) $-\frac{88}{3}+\frac{16}{3}i$ (C) $\frac{88}{3}-\frac{8}{3}i$ (D) $-\frac{88}{3}-\frac{8}{3}i$

9 求複變級數$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}(z+i)^{2n}$之中心點（center）及收斂半徑（radius of convergence）：

(A)中心點（center）為 i，收斂半徑為 e (B)中心點（center）為$-i$，收斂半徑為 $1/e$

(C)中心點（center）為$-i$，收斂半徑為 $1/\sqrt{e}$ (D)中心點（center）為 i，收斂半徑為$\sqrt{e}$

10 令 $y=a\cos(3x)+b\sin(3x)+c\cos(4x)$ 為微分方程式 $y''+9y=14\cos(4x)$ 之解，其中 $y(0)=0$，$y'(0)=3$，求 $a+b+c$ 值？

(A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 8

11 求$\frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)$之拉普拉斯轉換（Laplace Transform），為下列何者？

(A) $\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ (B) $\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$ (C) $\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$ (D) $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

12 下列何者是微分方程式 $y''-\frac{4}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=x^2+1$ 的解？（選項中 c_1 和 c_2 為任意常數，而 a_1 和 a_2 為某特定常數。）
(A) $c_1x^2+c_2x^2\ln(x)+a_1+a_2x^2(\ln(x))^2$
(B) $c_1x^2+c_2x^2\ln(x)+a_1x^2(\ln(x))^2+a_2x^4$
(C) $c_1x+c_2x^4+a_1+a_2x^2$
(D) $c_1x+c_2x^4+a_1x^2+a_2x^4\ln(x)$

13 請問 $e^{-2x}\cos x$ 是下列那一微分方程式的解？
(A) $y'''+7y''+16y'-10y=0$
(B) $y'''+y''-7y'-15y=0$
(C) $y''+8y'+17y=0$
(D) $3y'''+2y''-8y'-16y=0$

14 下列何者不可能是 $y''+Ay'+By=0$（A 和 B 為常數）的解？
(A) x
(B) x^2
(C) e^{x+1}
(D) $e^x\cos(2x+3)$

15 若 c 為常數，$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 分別為偏微分波方程式（wave equation）及偏微分熱方程式（heat equation），則下列何者錯誤？
(A) $u(t,x)=\sin 2t\sin x$ 是偏微分波方程式之解
(B) $u(t,x)=e^{-4t}\cos 3x$ 是偏微分熱方程式之解
(C) $u(t,x)=e^{t}\sin 3x$ 是偏微分波方程式之解
(D) $u(t,x)=e^{-t}\sin x$ 是偏微分熱方程式之解

16 若 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換為 $L\{f(t)\}=F(s)$，則 $L\{t*e^{2t}\}$ 為何，其中符號"*"為迴旋積（convolution）？
(A) $\frac{1}{s(s-2)}$
(B) $\frac{1}{s(s+2)}$
(C) $\frac{1}{s^2(s-2)}$
(D) $\frac{1}{s^2(s+2)}$

17 有一函數 $F(x)=\begin{cases}0 & if\ -5<x<0\\ 3 & if\ 0<x<5\end{cases}$，週期為 10，則傅立葉係數 $b_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}F(x)\sin\left(\frac{n\pi}{5}x\right)dx$ 之值為何？
(A) $b_n=0$
(B) $b_n=\frac{(1-\cos n\pi)}{n\pi}$
(C) $b_n=\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$
(D) $b_n=3$

18 連續隨機變數 X 具有機率密度函數 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{3},-1<x<2\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，求機率 $P(0<\mathrm{X}\le 1)$ 為何？
(A) 1/9
(B) 2/9
(C) 1/3
(D) 4/9

19 設隨機變數（random variable）X 和 Y 的聯合機率密度函數（joint probability density function）為 $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{12}e^{-(x/4)-(y/3)}, & 0<x<\infty \text{ and } 0<y<\infty\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$。則機率 $P[4<X\le 12, 0<Y<\infty]$ 之值為何？
(A) $e^{-3}-e^{-4}$
(B) $e^{-1}-e^{-3}$
(C) $e^{-1}-e^{-4}$
(D) 2/3

20 某連續隨機變數 X 之值域為[0,1]，密度函數為 $f(x)=2x$，試求期望值 E[X]為何？
(A) $\frac{1}{3}$
(B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{2}{3}$
(D) 1