

類 科：統計

科 目：統計學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器，須詳列解答過程。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、(一)令 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 為標準常態分配的隨機樣本，說明隨機變數 W 的機率分配（不需證明）。（9 分）

$$1. W = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2$$

$$2. W = Z_5 / \sqrt{X/5}, \text{ 其中 } X = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2$$

$$3. W = \frac{Y/2}{X/5}, \text{ 其中 } Y = Z_8^2 + Z_9^2, X = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2$$

(二)令 $Z=Y+X$ ， Y 為卡方分配自由度 v_1 分配、 Z 為卡方分配自由度 v_3 分配，且 Y 與 X 相互獨立，以動差生成函數（moment generating function）推論 X 的機率分配。（9 分）

二、某製造公司設計一項試驗，以決定生產所需原料是以人工或自動方式裝填是否存在差異，以及兩台機器所生產之瑕疵品數目是否會影響瑕疵品數量。下表為生產的瑕疵品數量，已計算得知總平方和 $SST=151.5$ 。在顯著水準 $\alpha=5\%$ 下（右尾： $F_{0.05}(1,4)=7.71$ 、 $F_{0.05}(1,5)=6.61$ 、 $F_{0.05}(1,6)=5.99$ ）：

	裝填方式	
	人工	自動
機器 1	30	30
	34	26
機器 2	20	24
	22	28

(一)檢定機器、裝填方式及他們的交互作用是否存在顯著效果？（15 分）

(二)設若在此試驗設計中，兩台機器是設定為集區變數（Block），則裝填方式是否仍存在顯著效果？（10 分）

三、一隨機變數 $Y=-2\log X$ ，其中隨機變數 X 具有混合型的機率密度函數如下：

$$f(x)=0.8 \quad 0 < x < 1, f(x)=0.2 \quad x=1$$

(一)求隨機變數 Y 的機率密度函數，並計算 Y 的中位數。（10 分）

(二)求隨機變數 Y 的動差生成函數，並計算 Y 的平均數。（15 分）

四、設 X_1, X_2, \dots, X_n 為一組隨機樣本服從母體 X 具機率密度函數 $f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}$ ， $x > 0$ 。

(一)證明 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 是參數 θ 的一個充分統計量。（10 分）

(二)試求參數 θ 的最大概似估計量 MLE（Maximum Likelihood Estimator）。（10 分）

(三)若要檢定 $H_0: \theta=1$ 對應 $H_1: \theta=2$ ，依據 Neyman-Pearson Lemma，試求檢定統計量及其顯著水準 α 。（12 分）