

代號：36020
36120
36220
頁次：4-1

107年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、電信工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
- (二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
- (三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、若 \mathbf{A} 與 \mathbf{B} 互為相似 (similar) 之 $n \times n$ 矩陣， $\text{trace}(\mathbf{A})$ 為矩陣 \mathbf{A} 之跡數 (trace) 且 λ 為任意常數，令 \mathbf{I} 為 $n \times n$ 單位矩陣，試證明：

(一) $\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}$ 與 $\lambda\mathbf{I}+\mathbf{B}$ 相似。(5 分)

(二) $\text{trace}(\mathbf{A}) = \text{trace}(\mathbf{B})$ 。(5 分)

(三) $\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{B})$ 。(5 分)

二、利用級數 $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ 解微分方程式 $(x+1)y' = y$ ，其中 $y' = \frac{dy}{dx}$ 。(10 分)

三、請求出週期函數 $f(x) = \frac{x^2}{2}$ ，其中 $-\pi < x < \pi$ 之傅立葉級數，再利用此級數證明

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (15 \text{ 分})$$

四、試求積分 $\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)} dz$ ，其中 C 為逆時針方向的圓積分路徑 $|z|=4$ 。(10 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：2360

- (一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
- (二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 假設 \mathbf{A} ， \mathbf{B} 為同階方陣，則 ① $\text{trace}(\mathbf{AB}) = \text{trace}(\mathbf{BA})$ ② $\text{trace}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{trace}(\mathbf{A}) + \text{trace}(\mathbf{B})$

③ $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}|$ ④ $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ ，下列敘述何者正確？

- (A) ①②③④皆成立 (B) 僅①②③成立 (C) 僅②③成立 (D) 僅①③成立

2 令 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 為同維度之三向量，則下列有關其外積（cross product）的敘述何者正確？

(A) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

(B) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

(C) 若 $\mathbf{a} \neq 0$ 且 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ ，則 $\mathbf{b} = \mathbf{c}$

(D) 若 $\mathbf{a} \neq 0$ 且 $\mathbf{b} \neq 0$ ，仍有可能 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$

3 令矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，若 \mathbf{A} 的秩（rank）為 2，則 a 值為何？

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

4 已知 n 為任意正整數， $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ 及 $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ 皆為已知常數矩陣， $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ 為未知矩陣。若線性方程式系統 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 存在唯一解，下列何者正確？

(A) $\text{adj}(\mathbf{A}) = 0$

(B) $\text{rank}(\mathbf{A}) = 0$

(C) $\det(\mathbf{A}) = 0$

(D) $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 0$

5 求出線性轉換 $\mathbf{L}: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ， $\mathbf{L}(x, y, z) = (x - 2y, 2x + y)$ 的代表矩陣為：

(A) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(B) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(D) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6 矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ 的秩之值為何？

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

7 將 e^{5+2i} 化簡為 $a+bi$ 形式的敘述（ a, b 為常數），則化簡後結果為：

(A) $e^{5t}(\cos(2t) + i \sin(2t))$

(B) $e^{5t}(\cos(2t) - i \sin(2t))$

(C) $e^5(\cos(2) + i \sin(2))$

(D) $e^5(\cos(2) - i \sin(2))$

8 假設路徑 C 為一逆時針方向的單位圓 $|z| = 1$ ，求 $\int_C \frac{\sinh z}{z^2} dz$ 之值為何？

(A) $2\pi i$

(B) πi

(C) $\frac{\pi i}{2}$

(D) $-\pi i$

9 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) 表示為 $L\{f(t)\}$ ，若 $L\{f(t)\} = \frac{e^{-2s}}{s^2 - 3s + 2}$ ，則 $f(t)$ 為何？

其中 $u(t)$ 為單位步階 (unit step)。

- (A) $(e^{t-2} - e^{2t-4})u(t-2)$ (B) $(-e^{t-2} + e^{2t-4})u(t-2)$
 (C) $((t-2)e^{t-2} + e^{2t-4})u(t-2)$ (D) $(-(t-2)e^{t-2} + e^{2t-4})u(t-2)$

10 假設方程式 $y(t) - \int_0^t y(\tau)(t-\tau)d\tau = 2 - \frac{1}{2}t^2$ 的解是 $y(t) = a + be^t + ce^{-t}$ ，其中 a, b, c 是常數，求

$a+b+c = ?$

- (A)-1 (B)1 (C)2 (D)3

11 下列何者可做為微分方程式 $2 + (6x - e^{-2y})\frac{dy}{dx} = 0$ 的積分因子 (integration factor)？

- (A) $e^{2x}y^3$ (B) x^3e^{2y} (C) e^{3y} (D) e^{3x}

12 給定一個二維 (2-dimension) 微分方程式 $x'(t) = -2y(t), y'(t) = \frac{1}{2}x(t)$ ，且滿足 $x(0) = 2, y(0) = 0$ ，

則下列選項何者正確？

- (A) $x(t) = 2\cos t$ (B) $x(t) = 2\cos 2t$ (C) $y(t) = \sin 2t$ (D) $y(t) = 2\sin 2t$

13 下列何者是 $(x-1)^2 y'' - 4xy' + 4y' + 4y = 0$ 的解？(選項中 c_1 和 c_2 為任意常數。)

- (A) $c_1 x^4 + c_2 x$ (B) $c_1 (x-1)^4 + c_2 (x-1)$
 (C) $c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln(x)$ (D) $c_1 (x-1)^2 + c_2 (x-1)^2 \ln(x-1)$

- 14 複變函數 $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $x+iy$ 為可微分，則下列何條件必須滿足？
- (A) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ (B) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$
- (C) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ (D) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$
- 15 求符合偏微分方程式 $u_{xy} - 4u_x = 0$ 的通解。
- (A) $c_1(x)e^{-4y} + c_2(y)$ ，其中 c_1, c_2 為函數 (B) $c_1(y)e^{4y} + c_2(x)$ ，其中 c_1, c_2 為函數
- (C) $c_1(x)e^{4y} + c_2(y)$ ，其中 c_1, c_2 為函數 (D) $c_1(y)e^{-4y} + c_2(x)$ ，其中 c_1, c_2 為函數
- 16 求函數 $F(s) = \frac{5s+1}{s^2-25}$ 的逆拉式轉換 (inverse Laplace transform) ？
- (A) $5 \sinh 5t + \frac{1}{5} \cosh 5t$ (B) $5 \cosh 5t + \frac{1}{5} \sinh 5t$ (C) $5 \cos 5t + \frac{1}{5} \sin 5t$ (D) $5 \sin 5t + \frac{1}{5} \cos 5t$
- 17 已知 $F(s) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$ 為 $f(t)$ 的傅立葉轉換 (Fourier transform)， $f^*(t)$ 為 $f(t)$ 的共軛複數 (complex conjugate)，其中 $s = j\omega$ ，下列何者錯誤？
- (A) $f^*(t)$ 的傅立葉轉換為 $F^*(-s)$ (B) $f^*(-t)$ 的傅立葉轉換為 $F^*(-s)$
- (C) $f(-t)$ 的傅立葉轉換為 $F(-s)$ (D) $f(3t)$ 的傅立葉轉換為 $\frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right)$
- 18 投擲兩顆公正骰子，獲得兩個相同數字 (equal numbers) 或是數字具偶數乘積 (numbers with even product) 的機率為何？
- (A) 15/36 (B) 27/36 (C) 5/6 (D) 8/9
- 19 假設 X 和 Y 為兩個獨立的隨機變數，其聯合機率分布 (joint probability distribution) $f(x,y)$ 為 $f(2,1) = 0.1$ ， $f(2,3) = 0.2$ ， $f(2,5) = 0.1$ ， $f(4,1) = 0.15$ ， $f(4,3) = 0.3$ ， $f(4,5) = 0.15$ ；試問一個隨機變數 $Z = XY$ ，則此隨機變數 Z 的期望值為何？
- (A) 3.6 (B) 6 (C) 9.6 (D) 12
- 20 若 X 的機率質量函數為 $p(0) = 1/3$ ， $p(1) = 2/3$ ，則其期望值 $E[X]$ 為多少？
- (A) 1/3 (B) 1/2 (C) 2/3 (D) 1