代號：26320
|
26520
29220
頁次：4－1

105年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　　　　　　　　　　　　　　　座號：______________

※注意：禁止使用電子計算器。

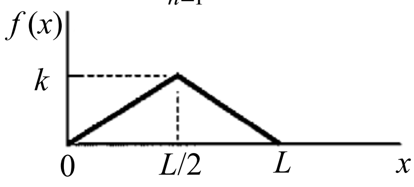
甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、z 為複數，考慮一已知收斂之冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n+1}(z-1+2i)^{2n}$，其中心為 $z_0 = 1-2i$，則其收斂半徑為何？（15分）

二、設矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，求 $\mathbf{A}^{49}$。（15分）

三、已知一函數為 $f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x & \text{if } 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(L-x) & \text{if } \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$，如下圖所示。若以半幅展開 $f(x)$ 成為傅立葉餘弦級數 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$ 的型式，試求出 a_0 及 a_n。（10分）



四、一平行立方體（parallelepiped）是由(1, 6, 1)到(−2, 4, 2)、(3, 0, 0)及(2, 2,−4)的三個邊所建構而成，此平行立方體體積為何？（10分）

乙、測驗題部分：（50 分） 代號：2263

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 假設 X 為連續型隨機變數，具有機率密度函數（density function）$f_X(x)=e^{-2|x|}$，試求 $Y=0.5X^2$ 之平均值 E(Y)為何？

(A)1/4 (B)1/3 (C)1/2 (D)1

2 求 xy 平面上與正 x 軸夾角為 0.3π，長度為 3 的向量 **F** 為何？

(A)$\mathbf{F}=3\cos(0.3\pi)\mathbf{i}+3\sin(0.3\pi)\mathbf{j}$ (B)$\mathbf{F}=3\sin(0.3\pi)\mathbf{i}+3\cos(0.3\pi)\mathbf{j}$

(C)$\mathbf{F}=3\cos(0.3\pi)\mathbf{i}-3\sin(0.3\pi)\mathbf{j}$ (D)$\mathbf{F}=3\sin(0.3\pi)\mathbf{i}-3\cos(0.3\pi)\mathbf{j}$

3 設 C 為一位在 $y=2$ 平面上以點(1, 2, 1)為中心，半徑為 4 的圓。則其曲率（curvature）為何？

(A)2 (B)$\frac{1}{2}$ (C)4 (D)$\frac{1}{4}$

4 求 $\int_C xy\,dx-y\sin(x)\,dy$ 之值，其中 C 為 $x(t)=t^2,\ y(t)=t,\ -1\leqq t\leqq 4$：

(A)410－0.5sin(16)+0.5sin(1) (B)410－0.5cos(16)+0.5cos(1)

(C)410+0.5sin(16)－0.5sin(1) (D)410+0.5cos(16)－0.5cos(1)

5 有一矩陣 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&8&12\\5&7&9\\3&6&2\end{bmatrix}$，求該矩陣之反矩陣為何？

(A)$\begin{bmatrix}-\frac{10}{21}&\frac{14}{21}&-\frac{1}{7}\\\frac{17}{84}&-\frac{1}{3}&\frac{6}{21}\\\frac{9}{84}&0&-\frac{1}{7}\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}\frac{10}{21}&-\frac{14}{21}&\frac{1}{7}\\-\frac{17}{84}&\frac{1}{3}&-\frac{6}{21}\\\frac{9}{84}&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix}-\frac{11}{21}&-\frac{14}{21}&-\frac{1}{9}\\\frac{17}{84}&\frac{2}{3}&-\frac{6}{21}\\-\frac{7}{84}&0&\frac{1}{9}\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}-\frac{13}{21}&\frac{14}{21}&\frac{1}{7}\\\frac{19}{84}&\frac{1}{3}&-\frac{6}{21}\\\frac{9}{84}&0&-\frac{1}{7}\end{bmatrix}$

6 以下敘述何者正確？

(A) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$不為一正交（*orthogonal*）矩陣 (B) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&5\\4&-1&-3&4\\3&-2&4&1\\-9&8&8&1\end{bmatrix}$則 $rank\mathbf{A}=4$

(C) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&3\\2&-4&1\end{bmatrix}$沒有反矩陣 (D) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&1&3\\1&-1&3\\-1&-1&1\end{bmatrix}$有反矩陣

7 設 $\mathbf{A}$ 是一個 2×2 的實方陣，它的特徵值為 1, −1，則 $\mathbf{A}^{37}$＝？

(A)0 (B)I (C)−$\mathbf{A}$ (D)$\mathbf{A}$

8 設 $\mathbf{A}$ 為 3×3 的矩陣，若 $\mathbf{A}$ 的行列式值 $\det(\mathbf{A}) = -2$，則 $\det(-3\,\mathbf{A})$之值為何？

(A)6 (B)−18 (C)54 (D)−54

9 求 $z\cos(\frac{1}{z})$在 $z = 0$ 之留數（residue）之值為何？

(A)0.5 (B)−0.5 (C)2 (D)−2

10 令 $f_1(z)$為一複數冪級數（complex power series）且其收斂半徑 $R_1 \neq 0$，已知 $f_2(z)$、$f_3(z)$、$f_4(z)$分別為 $f_1(z)$ 經逐項一次微分、二次微分與積分所得之複數冪級數，且其收斂半徑依次為 R_2, R_3, R_4，則下列敘述何者正確？

(A)$R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ (B)$R_4 > R_1 > R_2 > R_3$

(C)$R_4 < R_1 < R_2 < R_3$ (D)R_1, R_2, R_3, R_4 無固定關係

11 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z| = 2$，試求積分 $\int_C e^{\frac{1}{z}}dz$ 為何？

(A)0 (B)$-\pi i$ (C)$2\pi i$ (D)1

12 請計算 $\tilde{f}(s) = \dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$ 的反拉普拉斯轉換，求得 $f(t) = L^{-1}\{\tilde{f}(s)\} =$ ？

(A) $\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$ (B) $\dfrac{1}{a}(1-\cos at)$ (C) $\dfrac{1}{a^2}(1-\sin at)$ (D) $\dfrac{1}{a}(1-\sin at)$

13 試求微分方程式 $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$ 之通解，其中 $y' = \dfrac{dy}{dx}, y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$：（答案選項中 c_1, c_2 為常數。）

(A) $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$ (B) $y = (c_1 + c_2 \ln x)e^{2x}$ (C) $y = (c_1 + c_2 x + \ln x)e^{2x}$ (D) $y = (c_1 + c_2 x + x\ln x)e^{2x}$

14 定義傅立葉轉換為 $F(\varpi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\varpi x}dx$，求出函數 $f(x) = e^{-|x|}$ 的傅立葉轉換：

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{1-\varpi^2}$ (B) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{1-\varpi^2}$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{1+\varpi^2}$ (D) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{1+\varpi^2}$

15 下列何者為方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的解？

(A) $u=f(y+2x)+g(y+x)$
(B) $u=f(y+2x)+g(y-x)$
(C) $u=f(y-2x)+g(y+x)$
(D) $u=f(y-2x)+g(y-x)$

16 令 $F(s)=\frac{1}{s(s^2+1)}$，而 $f(t)=L^{-1}(F(s))$，則 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ 之值為何？

(A) 0
(B) 1
(C) ∞
(D) 不存在

17 下列何者為微分方程式 $\frac{d^4 y}{dx^4}-\frac{2}{3}\frac{d^3 y}{dx^3}+\frac{1}{9}\frac{d^2 y}{dx^2}=0$ 之通解？（答案選項中 c_1，c_2，c_3，c_4 為常數。）

(A) $y=c_1+c_2 x e^{x/3}+c_3 x^2 e^{x/3}+c_4 x^3 e^{x/3}$
(B) $y=c_1+c_2 x+c_3 e^{x/3}+c_4 x e^{x/3}$
(C) $y=c_1+c_2 x+c_3 x^2+c_4 x^3$
(D) $y=c_1+c_2 x+c_3 x^2+c_4 e^{x/3}$

18 考慮一包含 5 個開關元件的系統，其中 2 個開關元件(C_1, C_2)並聯（parallel connection）後再與另 3 個開關元件(C_3, C_4, C_5)串聯（Serial connection），若該 5 個開關元件(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)導通的機率分別為($\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$)，試求該系統導通之機率為何？

(A) $\frac{1}{72}$
(B) $\frac{11}{720}$
(C) $\frac{1}{36}$
(D) $\frac{13}{360}$

19 自一副 52 張撲克牌中取出 4 張牌，試求取出之牌剛好皆為黑桃或皆為紅心花色（suit）之機率為何？

(A) $\frac{22}{4165}$
(B) $\frac{33}{4165}$
(C) $\frac{44}{4165}$
(D) $\frac{55}{4165}$

20 若 **F**, **G** 兩向量正交，則以下敘述何者正確？

(A) **F**, **G** 的外積（Cross Product）為 0
(B) **F**, **G** 的內積（Inner Product）為 0
(C) **F**+**G** = 0
(D) ||**F**+**G** || = 0