

類 科：經建行政、工業行政、農業行政、交通技術

科 目：統計學

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

※本試題可能使用之標準常態值如下：

$$z_{0.025} = 1.96, z_{0.05} = 1.645, z_{0.1} = 1.28$$

$$t_{0.05}(15) = 1.753, t_{0.025}(15) = 2.131, t_{0.05}(16) = 1.746, t_{0.025}(16) = 2.120$$

- 一、在農業試驗之某種果樹可能生出既大又酸的水果，也可能生出雖小又甜的水果。若此種果樹長出既大又酸的水果之機率為  $p_1$  及長出雖小又甜的水果之機率為  $p_2$ 。令  $X$  為此試驗種出  $n=30$  棵果樹中長出既大又酸水果之棵數。但已知由  $X$  估計  $p_1$  的  $100(1-\alpha)\%$  信賴區間為  $(0.4, 0.7)$ ，試求：
- (一)  $p_2$  的  $100(1-\alpha)\%$  信賴區間。(15分)
- (二) 當顯著水準為  $\alpha \in (0, 1)$ ，但未知時，請檢定  $H_0: p_2 = 0.4$  vs.  $H_1: p_2 \neq 0.4$ 。(10分)
- 二、中部地區平均每公畝生產 A 水果 5 單位（每單位為 100 公斤）。近年因氣候異常，令人質疑每公畝平均產量是否仍為 5 單位。
- (一) 若隨機樣本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  具有常態分配  $N(\mu, 1)$ ，則請推導顯著水準為  $\alpha$  之概似比 (Likelihood Ratio) 檢定。(15分)
- (二) 若顯著水準  $\alpha = 0.05$ 、樣本數  $n = 25$  且樣本平均  $\bar{x} = 4$ ，則每公畝平均產量是否仍為 5 單位？(10分)
- 三、若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  為抽自  $N(\mu, \sigma^2)$  之隨機樣本，且  $X_{n+1}, X_{n+2}$  為獨立並具有相同分配。盼以  $X_1, X_2, \dots, X_n$  來預測  $Y = X_{n+1} + X_{n+2}$ ，則：
- (一) 請推導  $Y$  的  $100(1-\alpha)\%$  信賴區間。(15分)
- (二) 若已知  $n = 16$ ， $s^2 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{16} (X_i - \bar{x})^2 = 1.44$  及  $\bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i = 2$ ，試求  $Y$  的 95% 信賴區間。(10分)
- 四、假設  $X_1, X_2, \dots, X_n$  為一組隨機樣本具有如下分配：
- $$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0.$$
- (一) 請找出  $\theta$  的 Cramer-Rao 下限。(9分)
- (二) 請找出  $\theta$  的最大概似估計量 (mle)。(8分)
- (三) 請由 mle 之極限分配導出  $\theta$  的  $100(1-\alpha)\%$  信賴區間。(8分)