代號：35620、35720、38220
頁次：4－1

100年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：電力工程、電子工程、醫學工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、令 $f(t)=\begin{cases} 0, & t<3 \\ t+1, & t\geq 3 \end{cases}$，試求 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）。（10 分）

二、設矩陣 $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，

㈠求 A 的特徵值（eigenvalues）。（5 分）
㈡求 A 的特徵向量（eigenvectors）。（5 分）
㈢求A^{100}。（5 分）

三、試解微分方程 $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=x^4\ln x$，其中 $x>0$，$y'=\dfrac{dy}{dx}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$，以下類推。（15 分）

四、設 $\mathbf{v}=xy\mathbf{i}-4\mathbf{j}+zy\mathbf{k}$ 及 $A=(0,1,0)$、$B=(2,0,1)$、$D=(3,2,1)$ 等三點，若 C 為由 A 到 B 及 B 到 D 兩直線線段所組成。

求 $\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{R}=\int_C (xydx-4dy+zydz)=$ ？（10 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　**代號：2304**

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1　試求聯立微分方程式 $\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 之通解？

(A) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}e^{4t}+c_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{3t}$，其中$c_1$，$c_2$爲常數

(B) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}e^{4t}+c_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{3t}$，其中$c_1$，$c_2$爲常數

(C) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}e^{4t}+c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}e^{3t}$，其中$c_1$，$c_2$爲常數

(D) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}e^{2t}+c_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{4t}$，其中$c_1$，$c_2$爲常數

2 設 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 是微分方程式 $\mathbf{A}: y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解，而 $y_3(x)$ 及 $y_4(x)$ 是微分方程式 $\mathbf{B}: y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ 的解，則下列敘述何者錯誤？（題中 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ 為 x 之函數，且 $r(x) \neq 0$ ）

(A) $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 必定也是微分方程式**A**的解（其中c_1及c_2為任意常數）

(B) $y_3(x) - y_4(x)$ 必定也是微分方程式 **A** 的解

(C) $y_3(x) + y_4(x)$ 必定也是微分方程式 **B** 的解

(D) $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_3(x)$ 必定也是微分方程式 **B** 的解

3 假設函數 $F(s) = \dfrac{4s^2 + 2}{s^3 + 3s^2 + 2s}$ 之逆拉氏轉換（inverse Laplace transform）為 $L^{-1}\{F(s)\} = a + be^{-t} + ce^{-2t}$，其中 a、b、c 為常數，求 $a+b+c$？

(A) -3　(B) 2　(C) 3　(D) 4

4 求複變函數積分 $\int_C e^{z+i}dz$ 之值，其中積分路徑 C 的參數式為 $z(t) = 2e^{i2t}$，$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$，其中 $i = \sqrt{-1}$。

(A) $\left(e^{-2} - e^2\right)\left(\cos(1) + i\sin(1)\right)$

(B) $\left(e^{-2} + e^2\right)\left(\cos(1) + i\sin(1)\right)$

(C) $\left(e^{-2} - e^2\right)\left(\cos(1) - i\sin(1)\right)$

(D) $\left(e^{-2} + e^2\right)\left(\cos(1) - i\sin(1)\right)$

5 解微分方程式 $y' - 3y = -6y^2$，$y(0) = -1$（其中 $y' = \dfrac{dy}{dx}$）：

(A) $y = 1/(2 - 3e^{3x})$

(B) $y = 1/(2 - 3e^{-3x})$

(C) $y = 1/(1 - 2e^{3x})$

(D) $y = 1/(1 - 2e^{-3x})$

6 試求向量場 $\mathbf{v} = \sinh(x - z)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (z - y^2)\mathbf{k}$ 的散度（divergence）：

(A) $\cosh(x - z) + 3$

(B) $\cosh(x - z) + 4$

(C) $\cosh(x) + 3$

(D) $\cosh(x) + 2 + z$

7 $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$,　$\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 為兩個三維向量，以下那一個是 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$？

(A)向量 $w = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(B)純量 3

(C)純量 1

(D)向量 $w = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

8 複變函數 $f(z) = \dfrac{4i}{z^2 + 4}$ 以 $2i$ 為中心展開的羅倫級數（Laurent series）為何？其中 $i = \sqrt{-1}$。

(A) $\dfrac{1}{z - 2i} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{i}{4}\right)^{n+1}(z - 2i)^n$

(B) $-\dfrac{1}{z - 2i} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{i}{4}\right)^{n+1}(z - 2i)^n$

(C) $\dfrac{1}{z - 2i} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{i}{4}\right)^{n}(z - 2i)^n$

(D) $-\dfrac{1}{z - 2i} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{i}{4}\right)^{n}(z - 2i)^n$

9　若 **A** 及 **B** 皆為正交矩陣（orthogonal matrix），則下列敘述何者不恒真？

(A)矩陣 **AB** 也必為正交矩陣

(B)矩陣 **A**+**B** 也必為正交矩陣

(C)矩陣$\mathbf{A}^{-1}$也必為正交矩陣

(D)det(**AB**)=det(**BA**)$^{-1}$（其中det **X**表矩陣**X**的行列式值）

10　轉換$T: R^2 \to R^3$定義為$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y+2 \\ x-y+1 \\ x+3y+3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \boldsymbol{B}$，則：

(A) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$　(B) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

(C) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$　(D) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

11　設 A 為3×3的矩陣，若 A 的行列式值 det(A)=3，則 det(-2A)之值為何？

(A)-6　(B) 6　(C) 24　(D)-24

12　令矩陣$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$且**B**=$\mathbf{A}^{10}$，則下列敘述何者錯誤？

(A)$\mathbf{B}\mathbf{B}^{T}=\mathbf{B}^{T}\mathbf{B}$

(B)若$\theta = \pi/10$，則矩陣 **B** 為單位矩陣（unit matrix）

(C)無論θ為何值，矩陣**B**及$\mathbf{B}^{-1}$的特徵值（eigenvalue）之絕對值均為 1

(D)無論θ為何值，矩陣**B**及$\mathbf{B}^{-1}$的行列式值（determinant）均為 1

13　兩連續隨機變數 X、Y 之結合機率密度函數（joint probability density function）為

$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求$P(X<Y)=$？

(A) $\frac{2}{5}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{1}{6}$

14　一個盒子中有 998 個黑球及 2 個白球，若自盒中隨機挑選 500 球，令 x 為其中白球之數量，試求條件機率$P(x=1 \mid x=1 \text{ 或 } x=2)=$？

(A) $\frac{499}{1499}$　(B) $\frac{1000}{1499}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{1}{3}$

15 給定一個常態分布（Normal Distribution）的隨機變數 X，它的期望值（mean）為 0，變異值（variance）為 5。已知 $P(X > C) = 0.05$，也就是 X 大於 C 的機率為 0.05。求 $P(-C < X < C)$之值為何？

(A) 0.90　(B) 0.95　(C) 0.975　(D) 0.995

16 若 X 為一連續隨機變數（continuous random variable），其機率密度函數（probability density function）為 $f_X(x) = \begin{cases} kx(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，試求 $k =$？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 6

17 求 $\lim_{z \to 2e^{\pi i/3}} \dfrac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$ 之值為何？

(A) $\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$　(B) $\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$　(C) $\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$　(D) $\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$

18 請計算 $\dfrac{2^{12}}{(1-i)^{20}}$ 之值，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。

(A) $-4+4i$　(B) $4i$　(C) -4　(D) 4

19 若 $\varphi(x, y, z) = xy - yz + xyz$ ，則其在點 $P = (0, -1, 1)$ 之最大改變率（rate of change）之值為何？

(A) -2　(B) 2　(C) $\sqrt{5}$　(D) $\sqrt{6}$

20 已知三向量 $\mathbf{a} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 、 $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ， $(\mathbf{b} + 2\mathbf{c}) \times \mathbf{a}$ 等於：

(A) $-4\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$　(B) $4\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$　(C) $4\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$　(D) $-4\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$