

99年公務人員特種考試警察人員考試及  
99年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

代號：50950

全一張  
(正面)

等 別：高員三級  
類 科：電子工程  
科 目：工程數學  
考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。  
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、求微分方程式  $y'' - 4y' + 9y = 10e^{2x} - 12\cos 3x$  的通解  $y(x)$ 。(10分)

二、若  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ，封閉曲面  $s$  由  $s_1: z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$  和  $s_2: z = 6$  所組成，請用此例來驗證散度定理 (Gauss 定理)，亦即  $\iint_s \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv$ ，其中  $\mathbf{n}$  為  $s$  之向外單位法向量 (unit outer normal vector)， $V$  為  $s$  所包圍之封閉區間。(15分)

三、若  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求  $A^{1000}$ 。(10分)

四、試應用留數定理 (Residue Theorem)，計算下列積分  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a \cos \theta} d\theta$ ，其中  $-1 < a < 1$ 。  
(15分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：5509

- (一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。  
(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 1 求微分方程式  $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$  的通解。(題中  $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ ， $y'' \equiv \frac{d^2 y}{dx^2}$ ，答案選項中  $c_1$  及  $c_2$  為常數)  
(A)  $c_1 x^{-1} + c_2 x^4$  (B)  $c_1 x + c_2 x^{-4}$  (C)  $c_1 x^{-2} + c_2 x^3$  (D)  $c_1 x^2 + c_2 x^{-3}$
- 2 設微分方程式  $y'' + ay' + by = 6x + 5$ ， $y(0) = y_0$ ， $y'(0) = y'_0$  的解  $y(x)$  的拉氏轉換為  $Y(s) = \frac{4s^3 + 9s^2 + 5s + 6}{s^4 + 4s^3 + 3s^2}$ ，試求常數  $a$ 、 $b$ 、 $y_0$  及  $y'_0$  之值，並判定下列何者正確？  
(A)  $a + b + y_0 + y'_0 = 4$  (B)  $a + b + y_0 + y'_0 = 5$  (C)  $a + b + y_0 + y'_0 = 6$  (D)  $a + b + y_0 + y'_0 = 7$
- 3 對微分方程式的初始值問題 (initial value problem)  $e^x y'' + \frac{3}{x^2 - 1} y = \frac{2}{x}$ ， $y(-2) = 1$ ， $y'(-2) = 2$  可以確定的是  $x$  在下列那一區間可保證有唯一解？  
(A)  $-\infty < x < \infty$  (B)  $-\infty < x < 1$  (C)  $-\infty < x < -1$  (D)  $-\infty < x < 0$
- 4 函數  $f(t)$  之拉氏轉換 (Laplace transform) 為  $L\{f(t)\}$ ，令  $F(s) = L\{e^{2t} \cos 3t\}$ ，則  $F(3)$  等於何值？  
(A) 1/10 (B) 3/10 (C) 1/4 (D) 3/4
- 5 解微分方程式  $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 3xy - 12x = 0$ ，其中  $y(0) = 3$ ：  
(A)  $y = (x^2 + 1)^{-1/2} + 2$  (B)  $y = (x^2 + 1)^{-3/2} + 2$  (C)  $y = 4 - (x^2 + 1)^{-3/2}$  (D)  $y = 4 - (x^2 + 1)^{-1/2}$
- 6 複變函數  $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^3}$  以 0 為中心展開的羅倫 (Laurent) 級數中  $z^2$  的係數為何？  
(A) 0 (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $-\frac{1}{24}$  (D)  $-\frac{1}{120}$

(請接背面)

等 別：高員三級  
類 科：電子工程  
科 目：工程數學

7 請計算 $(1+i)^i$ 之值，其中 $i = \sqrt{-1}$ ：

(A)  $e^{\frac{\pi}{4}+2n\pi} (\cos(\ln \sqrt{2}) + i \sin(\ln \sqrt{2}))$ ， $n$  為任意整數

(B)  $e^{\frac{\pi}{4}+2n\pi} (\cos(\ln \sqrt{2}) - i \sin(\ln \sqrt{2}))$ ， $n$  為任意整數

(C)  $e^{-\frac{\pi}{4}+2n\pi} (\cos(\ln \sqrt{2}) + i \sin(\ln \sqrt{2}))$ ， $n$  為任意整數

(D)  $e^{-\frac{\pi}{4}+2n\pi} (\cos(\ln \sqrt{2}) - i \sin(\ln \sqrt{2}))$ ， $n$  為任意整數

8 若 $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 、 $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ，則 $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ 為何？

(A)  $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(B)  $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

(C)  $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

(D) 0

9 設 $\varphi(x, y, z) = y - 2x^2z + z^3$ ，而 $\mathbf{F}$ 為 $\varphi(x, y, z)$ 的最陡方向 (Gradient)，則 $\mathbf{F}$ 在從 $P_1 = (1, 1, 1)$ 到 $P_2 = (3, 1, 4)$ 直線的線積分為何？

(A) 7

(B) -7

(C)  $\sqrt{7}$

(D) 0

10 試求向量場 $\mathbf{v} = 2xy\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ 的旋度 (curl)？

(A)  $(e^y - 2x)\mathbf{i}$

(B)  $(e^y - 2x)\mathbf{k}$

(C)  $(e^y - 2x)\mathbf{j}$

(D)  $(e^y - 2x)$

11 假設一隨機變數 $X$ ，其動量產生函數 (moment-generating function) 為 $M_X(t) = E(e^{tX}) = e^{3(e^t-1)}$ ；試問此隨機變數 $X$ 的期望值 (mean) 為何？

(A) 1

(B) 3

(C) 6

(D) 9

12 假設隨機變數 $X$ 為一個標準常態分布 (standard normal distribution)，亦即 $\mu_X = 0$ 及 $\sigma_X^2 = 1$ ；已知機率 $P(X > 1.84) = 0.0329$ ，試求機率 $P(X > -1.84)$ 為何？

(A) 0.0329

(B) 0.0658

(C) 0.9342

(D) 0.9671

13 兩連續隨機變數 $X, Y$ 之結合累積分配函數 (joint cumulative distribution function) 為 $F_{X,Y}(x, y)$ ， $x, y \in R$ ，則下列何者不恆真？

(A)  $0 \leq F_{X,Y}(x, y) \leq 1, \forall x, y \in R$

(B)  $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$

(C)  $F_{X,Y}(-\infty, y) = F_Y(y)$ ，其中 $F_Y(y)$ 為 $Y$ 之累積分配函數

(D)  $F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0$

14 若一系統由二項獨立 (independent) 運作之組件構成，在任一組件正常運作下該系統即可正常運作，已知此二項組件正常運作之機率分別為0.8及0.4，試求此系統正常運作之機率？

(A) 0.12

(B) 0.32

(C) 0.68

(D) 0.88

15 若 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ， $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ，下列函數何者可以定義為 $R^2$ 上之一種內積 (inner product)？

(A)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1$

(B)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2$

(C)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$

(D)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 3u_2 v_2$

16 設 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{C}$ 為任三 $n \times n$ 矩陣，則下列敘述何者不恆真？(答案選項中 $\mathbf{0}$ 為零矩陣)

(A) 若 $\text{rank } \mathbf{A} = n$ 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ ，則 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

(B) 若 $\text{rank } \mathbf{A} = n$ 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ ，則 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

(C) 若 $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{B}$ ，則 $\text{rank } \mathbf{A}^2 = \text{rank } \mathbf{B}^2$

(D)  $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^T$

17 若 $S$ 為 $[1 \ 2 \ 1 \ 0]$ ， $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ 所生成之子空間，求 $R^4$ 上 $S$ 之正交補集 (Orthogonal Complement)：

(A) 由 $[-2 \ 1 \ 0 \ 0]$ ， $[-1 \ -1 \ 1 \ 0]$ 所生成之子空間

(B) 由 $[-2 \ 1 \ 0 \ 0]$ ， $[-1 \ 0 \ 1 \ 0]$ 所生成之子空間

(C) 由 $[-2 \ 1 \ 0 \ 0]$ ， $[-1 \ -1 \ 1 \ 1]$ 所生成之子空間

(D) 由 $[-2 \ 1 \ 1 \ 0]$ ， $[-1 \ -1 \ 1 \ 0]$ 所生成之子空間

18 若矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ a & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ，則下列何者正確？

(A) 假如 $a = 8$ 則 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ ， $\text{rank}$ 為矩陣之秩數

(B) 假如 $a = 8$ 則 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 3$ ， $\text{rank}$ 為矩陣之秩數

(C) 假如 $a = 1$ 則 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ ， $\text{rank}$ 為矩陣之秩數

(D) 假如 $a = 3$ 則 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ ， $\text{rank}$ 為矩陣之秩數

19 下列矩陣那一個不為正交 (orthogonal)？

(A)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(B)  $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(C)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(D)  $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

20 下列何者為微分方程式 $(\frac{4}{3}y + x^2 - xy^2)dy + (2xy - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3})dx = 0$ 之通解？

(A)  $3x^2y - xy^3 + 2y^2 = c$ ，其中 $c$ 為常數

(B)  $3x^2y - xy^3 + 2y^2 + x = c$ ，其中 $c$ 為常數

(C)  $2y^2 - 2xy^3 + xy + x = c$ ，其中 $c$ 為常數

(D)  $3x^2y - 2xy^3 + 2y^2 + 2x = c$ ，其中 $c$ 為常數