98年公務人員特種考試警察人員考試、98年特種考試交通事業鐵路人員考試及98年公務人員特種考試民航人員考試試題

代號：50750　全一張（正面）

等　　別：高員三級
類　　科：電力工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時

座號：______________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、求出下列微分方程式的通解：$y'+\frac{1}{x}y=3x^2y^3$（其中 $y'\equiv\frac{dy}{dx}$）。（15 分）

二、試求圓錐面 $S:\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4, x^2+y^2=z^2\right\}$ 之面積 $A(S)=\iint_S dA=$？（注意：不包括該圓錐體之圓形底面。）（10 分）

三、試應用留數（Residue）計算下列積分 $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\sin\theta}$。（15 分）

四、假設 A 是一個 2×2 實數矩陣，而且 $tr(A)=8$ 及 $\det(A)=12$，則請問 A 的特徵值（eigenvalues）為何？（提示：$tr(A)\equiv$trace of A；$\det(A)\equiv$determinant of A）（10 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　代號：5507

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 一微分方程式爲 $(x^2+3y^2)dx-2xydy=0$，試求其通解：（其中 k 爲任意實數。）
(A) $x^2=k(x+y)$　(B) $x^3=k(x^2+y^2)$　(C) $y^2=k(x+y)$　(D) $y^3=k(x+y)$

2 設 $L\{f(t)\}$ 爲 $f(t)$ 之拉氏轉換，下列何者爲錯？
(A) $L\{af(t)+bg(t)\}=L\{af(t)\}+L\{bg(t)\}$
(B) $L\{af(t)+bg(t)\}=aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\}$
(C) $L\{af(t)*bg(t)\}=aL\{f(t)\}\times bL\{g(t)\}$，*爲迴旋積分
(D) $L\{af(t)\times bg(t)\}=aL\{f(t)\}\times bL\{g(t)\}$

3 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=4$，且 $y(0)=y'(0)=0$，求 $y(1)$ 爲何？
(A) $4e^{-1}-8$　(B) $8e^{-1}-4$　(C) $8e^{-1}+4$　(D) $4e^{-1}+8$

4 試求反拉氏轉換（Inverse Laplace Transform）$L^{-1}\{(3s-2)/[s^2+6s+25]\}$：
(A) $3\cos 2t-2\sin 2t$　(B) $3e^{-3t}\cos 2t-2e^{-3t}\sin 2t$　(C) $3e^{-3t}\cos 4t-2.75e^{-3t}\sin 4t$　(D) $e^{-3t}\cos 2t-e^{-3t}\sin 2t$

5 設一三度空間內之曲線可表示爲位置向量 $\mathrm{F(t)}=\cos(\mathrm{t})\mathbf{i}+\sin(\mathrm{t})\mathbf{j}+\sqrt{3}\mathrm{t}\mathbf{k}$，其中 $-\pi\le \mathrm{t}\le\pi$，則該曲線長度爲何？
(A) 2π　(B) $\frac{4}{3}\pi$　(C) $2\sqrt{3}\pi$　(D) 4π

6 令 $F(s)=L\left((t^3-3t+2)e^{-2t}\right)$，則下列何者正確？
(A) $F(0)=\frac{5}{8}$　(B) $F(-1)=1$　(C) $F(1)=\frac{10}{27}$　(D) $F(\infty)=1$

7 下列那一向量與平面 $3x-5y+2z=10$ 垂直？
(A) $[1,-1,1]$　(B) $[1,1,1]$　(C) $[\frac{3}{10},-\frac{1}{2},\frac{1}{5}]$　(D) $[\frac{10}{3},-2,5]$

8 $f(t)$ 是週期爲 2π 的函數，定義 $g(t)$ 爲 $g(t)=\left(f(t)-f(-t)\right)/2$，將 $g(t)$ 的傅利葉級數（Fourier series）表示成 $g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right)$。下列敘述何者正確？
(A) $a_n=0, n=1,2,3,\cdots$　(B) $b_n=0, n=1,2,3,\cdots$　(C) $a_0\ne 0$　(D) $a_n+b_n=0, n=1,2,3,\cdots$

（請接背面）

98年公務人員特種考試警察人員考試、98年特種考試交通事業鐵路人員考試及98年公務人員特種考試民航人員考試試題　代號：50750　全一張（背面）

等　別：高員三級
類　科：電力工程
科　目：工程數學

9 矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的零空間（null space）可以向量形式 $\alpha v_1+\beta v_2$ 表示，其中 α 及 β 為常數，則下列何者正確？

(A) $v_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and $v_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (B) $v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and $v_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (C) $v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and $v_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (D) $v_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and $v_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

10 設 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$；當 $\mathbf{A}$ 的特徵值（eigenvalues）為 $\lambda_1=4, \lambda_2=7$ 時，$a=?\ \ b=?$

(A) $a=11, b=28$ (B) $a=11, b=-28$ (C) $a=28, b=11$ (D) $a=-28, b=11$

11 假設 x 是常態分配（normal distribution），其機率密度函數為 $N(0,1)$，且 $P(x\le -0.43)=1/3$，$P(x\le 0)=1/2$。今有 y 也是常態分配，其機率密度函數為 $N(3,4)$，若 $2P(y\le c)=P(y>c)$，則 c 為：

(A) 1.14 (B) 2.14 (C) 3.14 (D) 4.14

12 給定三個獨立（independent）的隨機變數 X，Y，Z，每一個隨機變數的期望值（mean）都是 μ，變異值（variance）都是 σ^2。定義隨機變數 W 為 $W=(X+Y+Z)/3$，求 W 的變異值（variance）為何？

(A) $\frac{1}{3}\sigma^2$ (B) σ^2 (C) $2\sigma^2$ (D) $3\sigma^2$

13 有一個週期為 2π 的函數 $f(x)=x^2$，$-\pi\le x\le \pi$，用傅立葉展開方式求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 等於下列何值？

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi^2}{6}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

14 將 $F(x)=x^2, 0<x<2\pi$，展開為傅立葉級數，當週期為 2π 時，$F(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，則 $b_n=$？

(A) $b_n=\frac{4\pi}{n}$ (B) $b_n=\frac{-4\pi}{n}$ (C) $b_n=\frac{\pi}{n}$ (D) $b_n=\frac{-\pi}{n}$

15 求 $\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^2}$ 之值為何？

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

16 假設 $z=x+iy$ 為複數（complex number），下列那一個是全函數（entire function）？

(A) $f(z)=2xy+i(x^2-y^2)$
(B) $f(z)=z-\bar{z}$，$\bar{z}$ 是 z 的共軛複數（complex conjugate）
(C) $f(z)=x\bar{z}$
(D) $f(z)=(z^2-2)e^{-x}e^{-iy}$

17 函數 $f(x)=\frac{1-x}{2+x}$ 在 $x=0$ 可解析，因此 Taylor 級數展開存在 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，則 x^3 的係數 c_3 之值為何？

(A) $-1/16$ (B) $-3/16$ (C) $1/16$ (D) $3/16$

18 若 $w^3-3z^2w+4\ln z=0$，求 $\frac{dw}{dz}=$？（其中 $w=w(z)$。）

(A) $\frac{dw}{dz}=\frac{6zw-4/z}{3w^2-3z^2}$ (B) $\frac{dw}{dz}=\frac{zw-4/z}{w^2-z^2}$ (C) $\frac{dw}{dz}=\frac{6zw-z}{w^2-z^2}$ (D) $\frac{dw}{dz}=\frac{zw-4/z}{3w^2-3z^2}$

19 令 $u=u(x,y)$，則下列何者不滿足偏微分方程式 $u_{yy}+3u_y-4u=0$？

(A) x^2e^{-4y} (B) e^{x^2+y} (C) $-e^{x^2-4y}+\sinh(x)e^y$ (D) $x^2e^{y^2+y}$

20 設 C 為圓 $|z|=1$ 之封閉曲線，求 $\oint_c(5z^4-z^3+2)dz=$？

(A) 1 (B) $2\pi i$ (C) 0 (D) π