

97年特種考試交通事業鐵路人員考試及
97年特種考試交通事業公路人員考試試題

資位別：高員三級

類科：鐵路—電力工程

科目：工程數學

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上由左至右橫式作答。

一、求出下列微分方程式的通解： $y'' + 2y' + y = -3e^{-x} + 8xe^{-x} + 1$

(其中 $y' \equiv \frac{dy}{dx}$, $y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$)。(10分)

二、 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，求 $A^{1000} = ?$ (5分) 及 $A^{-1000} = ?$ (5分)

三、應用拉式轉換 (Laplace transform)，求下列常微分方程式之特解 (particular solution)：(15分)

$$ty'' - ty' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

四、有一函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x & \text{if } 0 < x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(L-x) & \text{if } \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$ ，求其半幅展開的傅立葉餘弦級數

(以偶週期函數展開)。(15分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：5308

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題紙或申論試卷上作答者，不予計分。

- 1 試求初始值問題 (initial value problem) 的解： $y'' + y = t$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$ 。
- (A) $y(t) = t + \sin t - \cos t$ (B) $y(t) = t \sin t - \cos t$ (C) $y(t) = t + t \sin t - \cos t$ (D) $y(t) = t - \sin t + \cos t$
- 2 假設 $y' + p(x)y = q(x)y^a$ 稱為(1)式，則下列何者不正確？
- (A)若 $a = 0$ ，則(1)式為線性微分方程式
(B)若 $a = 1$ ，則(1)式為非線性微分方程式
(C)若 $a = 0$ ，則(1)式為白努利 (Bernoulli) 微分方程式
(D)若 $a = 1$ ，則(1)式為白努利 (Bernoulli) 微分方程式
- 3 下列那一組函數是線性相依 (linear dependent) ？
- (A) $y_1 = \cos wx$; $y_2 = \sin wx$ (B) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = xe^x$
(C) $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{6x}$, $y_3 = e^{9x}$ (D) $y_1 = x$, $y_2 = 3x$, $y_3 = x^2$
- 4 下列何者為 $y' + 2xy = 4x$ 之解？
- (A) $y = 2 + e^{-x^2}$ (B) $y = 3 + e^{-x^2}$ (C) $y = 4 + e^{-x^2}$ (D) $y = 5 + e^{-x^2}$
- 5 下列那一個矩陣的行空間 (column space) 含有向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，但不包含 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ？
- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- 6 下列那一個是正規矩陣 (normal matrix) ？
- (A) $\begin{bmatrix} -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 2 & 1+i \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2+i & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & i & 1 \\ i & 0 & -2+i \\ -1 & 2+i & 0 \end{bmatrix}$

- 14 定義傅立葉轉換為 $F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ ，求出 $f(t) = 10e^{-3|t+1|}$ 的傅立葉轉換（Fourier transform）：
- (A) $10e^{i\omega} \frac{3}{9-\omega^2}$ (B) $10e^{i\omega} \frac{3}{9+\omega^2}$ (C) $10e^{i\omega} \frac{6}{9-\omega^2}$ (D) $10e^{i\omega} \frac{6}{9+\omega^2}$
- 15 有一週期函數 $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } -2 < x < -1 \\ k & \text{if } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{if } 1 < x < 2 \end{cases}$ ，週期為 4， k 為常數，則傅立葉係數 $a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = ?$
- (A) 0 (B) $\frac{2k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$ (C) $\frac{k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$ (D) $\frac{2k}{n\pi} \sin n\pi$
- 16 若向量 $u = a^2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3a\mathbf{k}$ 與 $v = a\mathbf{i} + (a+3)\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ 互為垂直，則 a 不可能是下列何值？
- (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 2
- 17 令 $\sigma(x, y, z)$ 為空間中某物體之密度分佈， T 為該物體所存在之領域（region），試問下列何者表其體積（volume）？
- (A) $\iiint_T \sigma(x, y, z) dx dy dz$ (B) $\iiint_T dx dy dz$
- (C) $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} dx dy dz$ (D) $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \sigma(x, y, z) dx dy dz$
- 18 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n} - \sum_{n=3}^{\infty} n^n x^{n-3}$ 與下列那一級數相等？
- (A) $27 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - (n+3)^{n+3} \right) x^n$ (B) $-27 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - (n+3)^{n+3} \right) x^n$
- (C) $27 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - n^{n+3} \right) x^n$ (D) $-27 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - n^{n+3} \right) x^n$
- 19 拋擲一枚沒有偏差（也就是出現正面或反面機會都相等）的銅板二次，已知其中一次出現正面，則這二次拋擲都是出現正面的機率為何？
- (A) 1 (B) 1/2 (C) 1/3 (D) 1/4
- 20 設一隨機變數（random variable） X ，其期望值（mean value） $E[X]=1$ ，其均方差（variance） $\sigma_X^2=1$ 。令 $Y=3X+2$ ，則 $E[Y^2]$ 之值為何？
- (A) 36 (B) 34 (C) 25 (D) 18