107年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及
107年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

考試別：鐵路人員考試
等別：高員三級考試
類科別：電力工程、電子工程
科目：工程數學
考試時間：2小時　　　　座號：______

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、若線性轉換（linear transformation）矩陣 $T: R^2 \to R^2$ 的作用是將在 R^2 上的向量逆時針旋轉角度 θ，試以詳細計算過程求出：
㈠此線性轉換矩陣。（7分）
㈡順時針旋轉角度 θ 的線性轉換矩陣。（3分）

二、假設隨機變數 X 的累積分布函數（cumulative distribution function）可以表示成

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x<0 \\ \dfrac{x^2}{7} & \text{if } 0\le x<1 \\ \dfrac{2x}{7}-\dfrac{1}{7} & \text{if } 1\le x<3 \\ \dfrac{5x}{7}-\dfrac{x^2}{14}-\dfrac{11}{14} & \text{if } 3\le x<5 \\ 1.0 & \text{if } 5\le x \end{cases}$$

㈠試求出隨機變數 X 的機率密度函數（probability density function）$f(x)$ 為何？（5分）
㈡試求出 $P(1\le X\le 4)=$？（5分）

三、試求複變函數 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ 對 $z_0=0$ 展開的所有泰勒級數（Taylor series）及羅倫級數（Laurent series）。（15分）

四、利用 Frobenius 級數 $y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$ 的方法求解微分方程式 $(x^2-x)y''-xy'+y=0$。（15分）

乙、測驗題部分：（50 分）　代號：4704

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 向量 u =（-1,4,2,3）於向量 v =（-1,0,2,2）之投影（projection）的長度為何？

(A) $\frac{11}{3}$　(B) $\frac{11}{9}$　(C) $\frac{11}{\sqrt{30}}$　(D) $\frac{11}{30}$

2 下為敘述何者恆真？

(A) V 為向量空間（vector space），W 是 V 的子集合（subset），則 W 是 V 的子空間（subspace）

(B)空集合為任意一向量空間的子空間

(C) V 為非零向量空間，則 V 包含一子空間 W 且 $W \neq V$

(D) V 的任意二個子集合的交集（intersection）仍然是 V 的子空間

3 試求點（2,0,0）到平面 $x + 2y + 2z = 0$ 的距離為何？

(A)1　(B)2　(C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$　(D) $\frac{2}{3}$

4 給定三個 n × n 之可逆矩陣 A、B、C，下列敘述何者錯誤？

(A) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

(B) $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$

(C)若矩陣 A 是正交矩陣（orthogonal matrix），則矩陣 A 的反矩陣是 A^T

(D) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

5 假設矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且 A 的特徵值（eigenvalues）$\lambda_1 = 1$、$\lambda_2 = 5$，其對應的特徵向量（eigenvectors）分別為 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，則 $a + b + c + d$ = ？

(A)6　(B)10　(C)15　(D)20

6 下列矩陣何者為非正交矩陣（non-orthogonal matrix）？

(A) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

7　令 $e^z = 2 + i\,3$，則：

(A) $z = \ln(2) + i\ln(3)$

(B) $z = \ln(3) + i\ln(2)$

(C) $z = \frac{1}{2}\ln(9) + i\arctan(\frac{2}{3})$

(D) $z = \frac{1}{2}\ln(13) + i\arctan(\frac{3}{2})$

8　已知 $\{z_n = x_n + i\,y_n\}$ 為一複數數列，其中 x_n 及 y_n 分別代表 z_n 的實部及虛部，則下列敘述何者錯誤？

(A)若複數數列 $\{z_n\}$ 為發散，則數列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 至少其中之一為發散

(B)若數列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 其中之一為收斂，則複數數列 $\{z_n\}$ 可為收斂

(C)若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 及 $\lim_{n\to\infty} y_n = b$，則 $\lim_{n\to\infty} z_n = a + i\,b$

(D)若 $\lim_{n\to\infty} z_n = a + i\,b$，則 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 及 $\lim_{n\to\infty} y_n = b$

9　求 $f(z) = \dfrac{\tan^2(z)}{z^2\sin(z-\pi)\cos^3(z-\pi)}$ 在零點的極點次數（pole order）：

(A)0　(B)1　(C)2　(D)4

10　已知微分方程式 $y''+\alpha\,y'+\beta\,y = 0$ 的通解為 $y(x) = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$，試求 α、β 之值，並判定下列何者正確？（題中 α 、 β 、 c_1 、 c_2 為常數）

(A) $\alpha + \beta$ =15　(B) $\alpha + \beta$ = -15　(C) $\alpha + \beta$ = 6　(D) $\alpha + \beta$ = -6

11　下列何者為 $x^2y''-5xy'+9y = 0$ 之解？其中 a、b 為常數， $y' \equiv \dfrac{dy}{dx}$ ， $y'' \equiv \dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

(A) $ax^3 + bx^3\ln(x),\ x > 0$

(B) $ae^{3x} + bxe^{3x},\ x > 0$

(C) $e^{(5/2)x}[a\cos\sqrt{11}x + b\sin\sqrt{11}x],\ x > 0$

(D) $e^{-(5/2)x}[a\cos\sqrt{11}x + b\sin\sqrt{11}x],\ x > 0$

12　根據微分方程式 $(\sin x\cos x - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$ 及其初始條件 $y(0)$=4，請問下列何者為 y^2 之計算結果？

(A) $\dfrac{2-\cos x}{1-x}$　(B) $\dfrac{4-\sin x}{1-x}$　(C) $\dfrac{8-\cos^2 x}{1-x^2}$　(D) $\dfrac{16-\sin^2 x}{1-x^2}$

13 某一函數 $f(t)$ 的拉氏轉換（Laplace Transform）為 $F(s)=\dfrac{3s-1}{s^2-6s+25}$ ，則下列何者正確？

(A) $f(0^+)=2$ (B) $f(0^+)=12$ (C) $f'(0^+)=17$ (D) $f'(0^+)=21$

14 假設聯立微分方程式 $\begin{cases} y'_1=-2y_1+3y_2\ , y_1(0)=4 \\ y'_2=4y_1-y_2\ , \quad y_2(0)=3 \end{cases}$（其中 $y'_1=\dfrac{dy_1}{dt}, y'_2=\dfrac{dy_2}{dt}$）的解 $y_2(t)=ae^{2t}+be^{-5t}$ ，a、b 是常數，求 $a+2b=$？

(A)-2 (B)2 (C)3 (D)5

15 假設微分方程式 $y''-xy'+e^{2x}y=8$，其中 $y(0)=1$ 且 $y'(0)=2$，若 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 為此微分方程式之級數解，求 $a_1+a_2+a_3$ 的值為何？

(A) $\dfrac{7}{2}$ (B) $\dfrac{13}{2}$ (C) $\dfrac{31}{6}$ (D) $\dfrac{37}{6}$

16 考慮函數 $f(x)=1+\cos\pi x$ ，當 $x\notin[-1,1]$ 時，$f(x)=0$ ，求此函數之傅立葉轉換（Fourier transform）？

(A) $\sin\omega\left(\dfrac{2}{\omega}+\dfrac{1}{\pi+\omega}-\dfrac{1}{\pi-\omega}\right)$ (B) $\cos\omega\left(\dfrac{2}{\omega}+\dfrac{1}{\pi+\omega}-\dfrac{1}{\pi-\omega}\right)$

(C) $\sin\omega\left(\dfrac{2}{\omega}-\dfrac{1}{\pi+\omega}+\dfrac{1}{\pi-\omega}\right)$ (D) $\cos\omega\left(\dfrac{2}{\omega}-\dfrac{1}{\pi+\omega}+\dfrac{1}{\pi-\omega}\right)$

17 下列何者為 $x[n]=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|n-1|}$ 的傅立葉轉換 $X(e^{j\omega})$ ？

(A) $\dfrac{0.75e^{-j\omega}}{1.25-\cos\omega}$ (B) $\dfrac{0.5e^{-j\omega}}{1.5-\sin\omega}$ (C) $\dfrac{0.5e^{-j\omega}}{1.25+\cos\omega}$ (D) $\dfrac{0.75e^{-j\omega}}{1.5+\sin\omega}$

18 $x\in\Re$ 隨機均勻從 [-1,1] 區間選出，令事件 $A=\{x>0.75\}$， $B=\{|x-0.5|<1\}$，求 $P[A\cup B]\cdot P[A\cap B]=$？

(A) $\dfrac{3}{32}$ (B) $\dfrac{5}{16}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{7}{8}$

19 投擲一顆公平的骰子並記錄獲得點數，再投擲另一顆公平的骰子且記錄獲得點數，試求第二次點數大於第一次點數之機率：

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{5}{12}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{11}{18}$

20 設 X 為一隨機變數，它在每一可能值 -1、0、1 的機率分別為 $P\{X=-1\}=0.2$，$P\{X=0\}=0.5$，$P\{X=1\}=0.3$，求 $E[X^2]$：

(A)0.2 (B)0.3 (C)0.5 (D)1