代號：70560
70660
頁次：4－1

106年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及106年特種考試交通事業鐵路人員、退除役軍人轉任公務人員考試試題

考 試 別：鐵路人員考試
等　　別：高員三級考試
類 科 別：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、若 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，證明 $\mathbf{A}^2-4\mathbf{A}+5\mathbf{I}=0$，並由此計算 $\mathbf{A}^3$ 及 $\mathbf{A}^4$。（15 分）

二、解微分方程式 $y'+3x^2y=6x^2$，$y(0)=7$（題中 $y'\equiv\dfrac{dy}{dx}$）。（10 分）

三、以傅立葉級數（Fourier Series）表示 $f(\mathrm{t})$：（10 分）

$$f(\mathrm{t})=\begin{cases} \mathrm{t}+\pi, & -\pi\le \mathrm{t}\le 0 \\ -\mathrm{t}+\pi, & 0\le \mathrm{t}\le \pi \end{cases}\quad ;\qquad f(\mathrm{t})=f(\mathrm{t}+2\pi)。$$

四、一隨機變數 X 之機率密度函數為 $P(X=x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x=0,1,2,......$ 且 $\lambda>0$，試求：

㈠期望值 $E(X)$（5 分）
㈡變異數 $\mathrm{Var}(X)$（10 分）

乙、測驗題部分：（50 分） 代號：6705

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 下列各向量集合，何者不是 P_2 的一組基底？其中 P_2 為所有 2 階多項式形成的向量空間。

(A) $1+x+x^2,\ x+x^2,\ x^2$
(B) $3+x-4x^2,\ 2+5x+6x^2,\ 1+4x+8x^2$
(C) $1-3x+2x^2,\ 1+x+4x^2,\ 1-7x$
(D) $1+6x+4x^2,\ 2+4x-x^2,\ -1+2x+6x^2$

2 若 $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases}$，且 $\begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 \\ y_3 = 2z_1 + 3z_2 \end{cases}$，又 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$，則 M 為何？

(A) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

3 設 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，試求 **A** 的簡化列梯形式（reduced row echelon form）：

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

4 若 S = span {(1,0,0),(0,1,1)}，亦即 S 為(1,0,0),(0,1,1)兩向量所生成(span)的子空間，則下列何者為向量(2,3,1)在 S 上的正交投影？

(A)(1,1,1)
(B)(2,1,1)
(C)(1,2,2)
(D)(2,2,2)

5 設 A、B 均為 n × n 矩陣，且 $A = B^{-1}$，則下列敘述何者錯誤？

(A)rank(A) = rank(B)
(B)det(A) = det(B)
(C)$\det(A^{-1}) = \det(B)$
(D)AB = BA

6 假設線性轉換 $T: R^3 \rightarrow R^2$，已知 $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$，$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$，$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，如果 $T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$，請問 $m+n$=？

(A)5
(B)7
(C)9
(D)11

7 假設 $\mathrm{Ln}z=\frac{1}{2}+\pi i$，求 z 之值為何？（Lnz 為 ln$z$ 之主值（principal value））。

(A) $e^{\frac{1}{2}}$ (B) $-e^{\frac{1}{2}}$ (C) $-e^{\frac{1}{4}}$ (D) $-e^{\frac{2}{3}}$

8 求複變函數積分 $\oint_C \tan(z)dz$ 之值，其中 z 為複數且積分路徑 C 為圓 $|z|=2$，以及 $i=\sqrt{-1}$。

(A) $-2\pi i$ (B) $2\pi i$ (C) $-4\pi i$ (D) $4\pi i$

9 針對幾何級數（geometric series）$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 的敘述，其中 q 為複數，下列何者錯誤？

(A)若 $|q|<1$，則此級數收斂

(B)若 $|q|>1$，則此級數發散

(C)若 $|q|=1$，則此級數可能收斂也可能發散

(D)若此級數收斂，則其級數和（sum of the series）為 $1/(1-q)$

10 求下列微分方程式的特解：

$y''+4y=0$ 且 $y(0)=3$，$y'(0)=-8$

(A) $y=3\cos(2x)-4\sin(2x)$ (B) $y=2\cos(2x)-3\sin(2x)$

(C) $y=3\cos(3x)-4\sin(2x)$ (D) $y=3\sin(2x)-4\cos(2x)$

11 下列微分方程式何者的通解（general solution）為 $y=e^{2x}(1+c_1\sin(\sqrt{3}x)+c_2\cos(\sqrt{3}x))$？其中 c_1 及 c_2 為任意常數。

(A) $y''+y'+7y=13e^{2x}$ (B) $y''+4y'+7y=19e^{2x}$ (C) $y''-4y'+7y=3e^{2x}$ (D) $4y''-16y'+13y=-3e^{2x}$

12 下列何者不可能是 $x^2y''+Axy'+By=0$（A 和 B 為常數）的解？

(A) e^x (B) $x\ln(x)$ (C) e^2+x^2 (D) $x^{\sqrt{2}}\cos(5\ln(x))$

13 求 $f(t)=t\sin(at)$ 之拉氏轉換式：

(A) $\frac{2as}{(s+a)^2}$ (B) $\frac{2as}{(s^2+a^2)^4}$ (C) $\frac{2a^2s^2}{(s^2+a^2)^2}$ (D) $\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$

14 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）為 $L\{f(t)\}=\dfrac{3s^2-s+8}{s^3+4s^2-s-4}$，試求 $f(0)$ 之值？

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

15 已知 $f(t)$ 的傅立葉轉換為 $\Im\{f(t)\}=\dfrac{s}{s^3+5s^2+1}$，$s=j\omega$。下列何者正確？

(A) $\Im\{f(-t)\}=\dfrac{-s}{-s^3+5s^2+1}$ (B) $\Im\{f(3t)\}=\dfrac{3s}{27s^3+45s^2+1}$

(C) $\Im\{f(t-2)\}=\dfrac{e^{-j(2\pi s)}s}{s^3+5s^2+1}$ (D) $\Im\{\dfrac{d}{dt}f(t)\}=\dfrac{s^2}{s^3+5s^2+1}$

16 請用級數解法求出微分方程式 $y''-y'-y=0$ 之級數解 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$，當 $y(0)=0, y(1)=1$，$c_0+c_1+c_2=$？

(A)2.5 (B)1.5 (C)0.5 (D)0.25

17 一週期函數 $f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<\pi\\ -1 & -\pi<t<0\end{cases}$，其傅立葉級數表示為 $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt$（其中 n 為常數），下列何者正確？

(A) $a_0=0$ (B) $a_0=1$ (C) $a_n=\pi$ (D) $a_n=2\pi$

18 投擲一公平的錢幣連續 6 次，試求出現正面超過 3 次的機率為何？

(A) $\dfrac{7}{32}$ (B) $\dfrac{11}{32}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{5}{8}$

19 設隨機變數（random variable）X 和 Y 的聯合機率密度函數（joint probability density function）為：

$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1/40, & 0<x<5 \text{ and } 0<y<8\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$。則機率 $P[Y\le 1.2X]$ 之值為何？

(A) $\dfrac{5}{16}$ (B) $\dfrac{3}{8}$ (C) $\dfrac{5}{8}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

20 假設一隨機變數 X，其期望值（expectation value）$\mu_X=5$，變異數（variance）$\sigma_X^2=25$；試問一個隨機變數 $Y=(X+5)^2$，則此隨機變數 Y 的期望值 μ_Y 為何？

(A)30 (B)50 (C)100 (D)125