代號：70860
70960
頁次：4－1

104年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及104年特種考試交通事業鐵路人員、退除役軍人轉任公務人員考試試題

等　　別：高員三級鐵路人員考試
類 科 別：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　座號：________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、設矩陣 $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -5\end{bmatrix}$，

㈠求 A 的特徵值（eigenvalues）。（5分）

㈡求 A 的特徵向量（eigenvectors）。（5分）

㈢求 A^{20}。（5分）

二、考慮有一個週期性函數 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<1\\ 1 & 1\le x<4\end{cases}$，週期為4，請將 $f(x)$ 表示成傅立葉三角級數（Fourier trigonometric series）。（15分）

三、請利用留數（residue）求 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x-5}{(x+1)(x^2+4)}dx$ 之值。（10分）

四、若 X 與 Y 是兩隨機變數（random variables），滿足 $E[X]=0$，$E[Y]=-1$，X 的均方差（variance）$\sigma_X^2=2$，$E[Y^2]=4$，$E[XY]=-2$。設隨機變數 W 與 U 分別為 $W=2X+Y$，$U=-X-3Y$。（E[*]表示*的期望值（mean value））。求：

㈠ $E[W^2]$。（3分）

㈡ $E[WU]$。（3分）

㈢ Y 的均方差（variance）：σ_Y^2。（4分）

乙、測驗題部分：（50 分） 代號：6708

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 設 $\mathbf{v}(t)$為一向量函數，若已知其長度為一非零常數，則下列何者為不可能？

(A) $\mathbf{v}'(t)$為零向量
(B) $\mathbf{v}'(t)$和 $\mathbf{v}(t)$正交
(C) $\mathbf{v}'(t)$為非零向量且平行於 $\mathbf{v}(t)$
(D) $\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{v}(t)$為常數（註："・"表內積運算）

2 令向量場 $F = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k}$，則在（1, 1, -1）處的散度（divergence）$\nabla\cdot F$ 為何？

(A) -1
(B) 0
(C) 4
(D) 8

3 若 $\boldsymbol{u} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ 且 $\boldsymbol{v} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$，則 $\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$為：

(A) $\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u})$
(B) $2xy + 2yz + 2zx$
(C) $\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})$
(D) $xy + yz + zx$

4 若 $F = 2x\cos(2y)\,\mathbf{i} - 2x^2\sin(2y)\,\mathbf{j}$，$C$ 為從（1, π）到（2, π）之某一曲線，求 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{R}$：

(A) 3
(B) 6
(C) 4-cos(2)
(D) 4+cos(2)

5 下列何者是正交矩陣（orthogonal matrix）？

(A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

6 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，則 A^{-1} 的行列式值（determinant）為何？

(A) 0.1
(B) 10
(C) -10
(D) -0.1

7 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix}$，則 A 的零空間（nullspace）之維度為：

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4

8 一矩陣 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$，下列何者不是矩陣 A 的特徵向量（characteristic vector）？

(A) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

9 設複數 $z = 6 + i8 = re^{i\theta}$，其中 $i=\sqrt{-1}$ ，則（r, θ）為何？

(A)(6, 8) (B)(6, $\tan^{-1}$(8)) (C)(8, $\tan^{-1}$(6)) (D)(10, $\tan^{-1}$(4/3))

10 令 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 為一複數級數（complex series），則下列敘述何者為錯誤？（註：答案中 q 是一個小於 1 的定值，N 是一個正數）

(A)若 $\sqrt[n]{|z_n|} \le q < 1, \forall n > N$ ，則此級數絕對收斂（absolutely convergent）

(B)若 $\sqrt[n]{|z_n|} < 1, \forall n > N$ ，則此級數收斂

(C)若 $\sqrt[n]{|z_n|} = 1, \forall n > N$ ，則此級數發散

(D)若 $\sqrt[n]{|z_n|} > 1, \forall n > N$ ，則此級數發散

11 令 $g(z)=\dfrac{1}{z}$ ，其中 $z \neq 0$ ，若 $z = x + iy$ ，則有關 $g(z)$ 的敘述何者正確？

(A)實部為 $-\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (B)實部為 $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ (C)虛部為 $-\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (D)虛部為 $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$

12 下列選項中 c_1、c_2 為任意常數。解微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2.5xy - 2y = 0$ ：

(A) $y = c_1\sqrt{x} + c_2x^4$ (B) $y = \dfrac{c_1}{\sqrt{x}} + c_2x^4$ (C) $y = c_1\sqrt{x} + c_2x^{-4}$ (D) $y = \dfrac{c_1}{\sqrt{x}} + c_2x^{-4}$

13 求解微分方程 $\dfrac{dr}{d\theta} = b[(\dfrac{dr}{d\theta})\cos\theta + r\sin\theta], r(\dfrac{\pi}{2}) = \pi, 0 < b < 1$ ：

(A) $r = \pi(1 - b\cos\theta)$ (B) $r = \pi(1 + b\cos\theta)$ (C) $r = \pi(b - \cos\theta)$ (D) $r = b(\pi - b\cos\theta)$

14 一微分方程式 $(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$ ，已知有一解為 $y_1 = x$ ，則下列何者為正確？

(A)另一解為 $y_2 = x\ln x + 1$ 且 y_2 與 y_1 為線性相依 (B)另一解為 $y_2 = x\ln x + x$ 且 y_2 與 y_1 為線性相依

(C)另一解為 $y_2 = x\ln x + 1$ 且 y_2 與 y_1 為線性獨立 (D)另一解為 $y_2 = x\ln x + x$ 且 y_2 與 y_1 為線性獨立

15 定義函數 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ ，令 $L\{f(t)\} = \dfrac{(s^2-4)e^{-s}}{(s^2+4)^2}$ ，則 $f(t)$ 為何？其中 $u(t)$ 為單位步階（unit step）函數。

(A) $[(t-1)\cos 2(t-1)]u(t-1)$ (B) $(t-1)\cos 2(t-1)$

(C) $(t-1)[\cos 2t - 2\sin 2t]$ (D) $(t-1)[\cos 2t - 2\sin 2t]u(t-1)$

16 設 $y=a(t)$ 為 $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=6$ 之解，則 $\lim_{t\to\infty} a(t)$ 之值為何？

(A)0 (B)1 (C)2 (D)4

17 定義傅立葉轉換（Fourier transform）為 $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$，其中 $i=\sqrt{-1}$，若 $f(x)$ 之傅立葉轉換為 $F(\omega)=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\cos(\omega)-1}{\omega}$，試問 $f(x)$ 為何？

(A) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{if } 0<x<2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

(B) $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & \text{if } x>0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & \text{if } x>0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

(D) $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{if } -1<x<0 \\ 1, & \text{if } 0<x<1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

18 投擲一個公正的硬幣 5 次，求正好 3 次正面朝上的機率為何？

(A)3/8 (B)5/16 (C)5/8 (D)11/16

19 兩離散隨機變數 X、Y 之結合機率為 $P(X=x, Y=y)=A(2x+3y)$，其中 $x=1, 2$；$y=1, 2, 3$，則 $A=$？

(A) $\frac{1}{54}$ (B) $\frac{1}{36}$ (C) $\frac{1}{24}$ (D) $\frac{1}{12}$

20 已知某一電話總機在單位時間內收到之電話數目遵守平均每分鐘 4 通之 Poisson 分布，令 X 表示收到 2 通電話之等待時間（分鐘），求 $P(X\le 1)$ 為何？

(A) $1-4e^{-2}$ (B) $1-5e^{-2}$ (C) $1-4e^{-4}$ (D) $1-5e^{-4}$