103年公務人員特種考試警察人員考試
103年公務人員特種考試一般警察人員考試
103年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

等　　別：高員三級鐵路人員考試
類　　科：電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　座號：________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、下列集合是否為 R^2 之子空間（subspace），請說明之。

㈠ $A=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2=0\}$（4分）
㈡ $B=\{(x_1,x_2)\mid x_1x_2=0\}$（3分）
㈢ $C=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2=1\}$（3分）

二、令 $\mathbf{F}=f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}+f_3\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{G}=g_1\mathbf{i}+g_2\mathbf{j}+g_3\mathbf{k}$ 為兩向量場，
驗證 $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})-\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$。（15分）

三、令複變函數 $f(z)=\dfrac{3}{1-iz+2z^2}$，試求：

㈠ $f(z)$ 對 $2i$ 展開的泰勒級數（Taylor series）。（10分）
㈡泰勒級數的收斂半徑。（5分）

四、求解 $y(t)=1+\int_0^t y(t-\alpha)\sin(2\alpha)d\alpha$。（10分）

乙、測驗題部分：（50分）　　　　**代號：6709**

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1　令 f 和 g 皆為可微分（differentiable）純量函數，則有關它們的梯度（gradient）與拉普拉斯算子（Laplace operator）的等式，下列何者錯誤？

(A) $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

(B) $\nabla(f/g)=(1/g^2)(f\nabla g-g\nabla f)$

(C) $\nabla(f^n)=nf^{n-1}\nabla f$

(D) $\nabla^2(fg)=g\nabla^2 f+2\nabla f\bullet\nabla g+f\nabla^2 g$

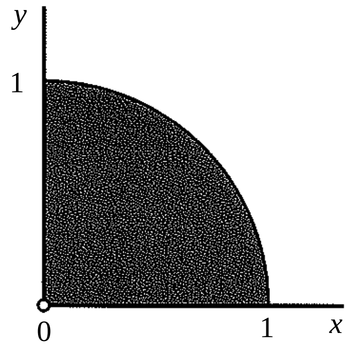
2 若 $f(x,y)=1$ 為定義於下圖所示區域之質量密度，下列有關其質量 M、重心（center of gravity，$\bar{x},\bar{y}$）、及慣性矩（moment of inertia，I_x, I_y）何者錯誤？

(A) $M=\dfrac{\pi}{4}$

(B) $\bar{x}=\dfrac{4}{3\pi}$

(C) $I_x=\dfrac{\pi}{8}$

(D) $I_y=\dfrac{\pi}{16}$



3 圓錐曲面 $\phi(x,y,z)=z-\sqrt{x^2+y^2}=0$，$x,y$ 不全為 0，則下列有關梯度（gradient）敘述何者正確？

(A)梯度向量＝$-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(B)梯度向量=$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(C)梯度向量=$\mathbf{i}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{k}$

(D)梯度向量=$-\mathbf{i}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{k}$

4 若函數 $f(x,y,z)=2xy+xe^z$，試求在點（1, 1, 1）之梯度（gradient）：

(A) $(2+2e)\mathbf{i}+2\mathbf{j}+e\mathbf{k}$

(B) $(2+2e)\mathbf{i}+(2+e)\mathbf{j}+(1+e)\mathbf{k}$

(C) $(2+e)\mathbf{i}+2\mathbf{j}+e\mathbf{k}$

(D) $(2+2e)\mathbf{i}+2\mathbf{j}+(1+e)\mathbf{k}$

5 $A\in R^{2\times 2}$，$c>0$，則 $\det(cA)$ 與 $\det(A)$ 的關係為何？其中 $\det(A)$ 表示矩陣 A 之行列式值（determinant）。

(A) $\det(cA)=c\bullet\det(A)$

(B) $\det(cA)=-c\bullet\det(A)$

(C) $\det(cA)=c^2\bullet\det(A)$

(D) $\det(cA)=-c^2\bullet\det(A)$

6 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&2\\1&4&1\end{bmatrix}$，試求其輔因子矩陣（matrix of cofactor）？

(A) $\begin{bmatrix}-5&1&1\\-1&2&-7\\2&-4&5\end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix}-5&-1&1\\1&2&-7\\2&4&-5\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}-5&-1&2\\1&-2&-4\\1&7&5\end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix}-5&-1&2\\-1&2&4\\1&-7&5\end{bmatrix}$

7　令矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$，試問 A 的秩（rank）為何？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

8　一矩陣 M 為 $n\times n$ 可逆實數矩陣，下列何者敘述錯誤？

(A)若 M 為對稱矩陣，則其特徵值（eigenvalue）必為實數

(B)若 M 為對稱矩陣，則其必然是正交可對角化（orthogonally diagonalizable）

(C)若 M 為正交可對角化的（orthogonally diagonalizable）且其特徵值（eigenvalue）為實數，則 M 必然為對稱矩陣

(D) M 之特徵向量（eigenvector）與 M^{-1} 之特徵向量不同

9　若 $z_1=1-i,\quad z_2=-2+4i,\quad z_3=\sqrt{3}-2i$，求 $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$ 之虛部值為？

(A) $(6\sqrt{3}+4)/7$　(B) $6\sqrt{3}/7$　(C) $4/7$　(D) $6\sqrt{3}+4$

10　下列複數數列何者為收斂？（註：$i=\sqrt{-1}$）

(A) $\left\{i^n\right\}$　(B) $\left\{(1+i)^n\right\}$　(C) $\left\{e^{n\pi i/4}\right\}$　(D) $\left\{(1-\dfrac{1}{n})+i(1+\dfrac{1}{n})\right\}$

11　請問 $z=\pi$ 是複變函數 $f(z)=\dfrac{z}{\sin^4(z)}$ 的幾階極點（pole）？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

12　設 $a(t)$ 為 $y'(t)+2y(t)=1$ 之解，則 $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)$ 等於何值？

(A) 0　(B) 0.5　(C) 1　(D) ∞

13　
$$\begin{aligned} f(x) &= x+\pi \\ &= a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \end{aligned}$$

$-\pi<x<\pi$，則 $a_1+b_1=$ ？

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) π

14　函數 $f(t)=\left[e^{-3t}\sin 5t\right]u(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）為何？其中 $u(t)$ 為單位步階（unit step）函數。

(A) $\dfrac{5}{s^2+6s+25}$　(B) $\dfrac{5}{s^2+6s+34}$　(C) $\dfrac{25}{s^2+6s+25}$　(D) $\dfrac{25}{s^2+6s+34}$

15　拉普拉斯轉換 $L\left[f(t)\right]=\dfrac{3s+2}{s^2+4s+5}$ ，求 $f(0)=$？

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

16　下列何者為 $y'=3x^2-\dfrac{y}{x};\ y(1)=1$ 之解？其中 $y'\equiv\dfrac{dy}{dx}$ 。

(A) $y=\dfrac{3}{5}x^2+\dfrac{2}{5x},\quad x>0$

(B) $y=\dfrac{3}{5}x^3+\dfrac{2}{5},\quad x>0$

(C) $y=\dfrac{3}{4}x^4+\dfrac{1}{4},\quad x>0$

(D) $y=\dfrac{3}{4}x^3+\dfrac{1}{4x},\quad x>0$

17　定義傅立葉轉換（Fourier transform）為 $F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$ ，其中 $i=\sqrt{-1}$ ，若 $f(x)$ 之傅立葉轉換為 $F(\omega)$。若 $f'(x)$ 的傅立葉轉換存在，試問 $f'(x)\cos(\omega_0 x)$ 的傅立葉轉換為何？

(A) $\dfrac{i\omega}{2}(F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0))$

(B) $\dfrac{i\omega}{2}(F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0))$

(C) $\dfrac{i}{2}((\omega-\omega_0)F(\omega-\omega_0)+(\omega+\omega_0)F(\omega+\omega_0))$

(D) $\dfrac{i}{2}((\omega-\omega_0)F(\omega-\omega_0)-(\omega-\omega_0)F(\omega+\omega_0))$

18　令 X 為二項式分布（binomial distribution）隨求變數，其機率為 $P(X=x)=C_x^n p^n(1-p)^{n-x}$ ，其中 $n=100$ ，$p=0.2$ ，求平均值 $E(50-2X)$ 為何？

(A) 5　(B) 10　(C) 20　(D) 50

19　假設第一個袋子內有 4 個白球和 3 個黑球，第二個袋子內有 3 個白球和 5 個黑球。從第 1 個袋子中取出一個球（隨意選取而且不被看到）並直接放入第二個袋子中。請問若從第二個袋子中隨意取出 1 個黑球的機率為何？

(A) 18/63　(B) 20/63　(C) 5/9　(D) 38/63

20　假定 X 為一隨機變數，其機率密度函數（density function）為 $f_X(x)=\begin{cases}Ae^{-4x}, & x\geq 0\\ 0\quad, & x<0\end{cases}$ ，求 A 為何？

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8