102年公務人員特種考試警察人員考試、102年公務人員特種考試一般警察人員考試及102年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

等　　別：高員三級鐵路人員考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、請用拉氏轉換（Laplace Transform）解聯立微分方程式：（10 分）

$$\begin{cases} y_1'' = -ky_1 + k(y_2 - y_1), \\ y_2'' = -k(y_2 - y_1) - ky_2;\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1,\ y_1'(0) = \sqrt{3k},\ y_2'(0) = -\sqrt{3k}. \end{cases}$$

二、令 Σ 是圓錐 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$， $x^2 + y^2 \le 9$ 的表面，若 n 為 Σ 之單位法向量且 $F = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - xyz\boldsymbol{k}$。求 $\iint_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$。（15 分）

三、設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$，

㈠求 A 的特徵值（eigenvalues）。（5 分）

㈡求 A 的特徵向量（eigenvectors）。（10 分）

四、若隨機變數（random variable）X 與 Y 的聯合機率密度函數（joint probability density function）為 $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/ab,\ 0 < x < a \text{ and } 0 < y < b \\ 0\quad,\ \text{elsewhere} \end{cases}$

其中 $a < b$。

求：㈠ $X + Y \le 3a/4$ 的機率：$P\{X + Y \le 3a/4\}$。（5 分）

㈡ $Y \le 2bX/a$ 的機率：$P\{Y \le 2bX/a\}$。（5 分）

乙、測驗題部分：（50 分） 代號：6708

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 一系統由 4 項獨立（independent）運作之組件構成，其組件正常運作之機率分別為 0.9，0.7，0.5 及 0.3，令隨機變數 X 為該系統中正常運作組件之數量，試求期望值 $E(X)=$？

(A) 0.6 (B) 1.2 (C) 2.4 (D) 3.6

2 設一隨機變數 X，其期望值（mean value）$\mu_X=8$，變異數（variance）$\sigma_X^2=9$；試問機率 $P(-4<X<20)$ 之值可能為何？

0.3 0.5 0.75 0.95

3 $\ln\dfrac{1+z}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，$|z|<1$，則 $a_1=$？

-1 0 1 2

4 請計算 $\lim_{z\to i}\dfrac{3z^{11}-3i}{z^3+2i}$ 之值，其中 $i=\sqrt{-1}$：

(A) -4 (B) 11 (C) -6 (D) 0

5 設 $\Gamma(t)=t+it,\ 0\le t\le 1,\ i=\sqrt{-1}$，則 $\int_{\Gamma} z^2 dz$ 之值為何？

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{3}(1+i)$ (C) $\dfrac{1}{3}(1-i)$ (D) $-\dfrac{2}{3}(1-i)$

6 已知複變數函數 $f(z)=\dfrac{1}{z(e^z-1)}$ 的奇異點（singular point）是為一個極點（pole），試決定此極點的階數（order）M 及對應的留數（residue）B 分別為何？

(A) $M=1,\ B=\dfrac{-1}{2}$ (B) $M=1,\ B=\dfrac{1}{2}$ (C) $M=2,\ B=\dfrac{-1}{2}$ (D) $M=2,\ B=\dfrac{1}{2}$

7 設 **A** 及 **B** 為任二 $n\times n$ 矩陣，則下列敘述何者錯誤？（答案選項中 det **X** 表矩陣 **X** 的行列式值）

(A) $\det k\mathbf{A}=k\det\mathbf{A}$（其中 k 為一常數）
(B) $\det(\mathbf{AB})=\det(\mathbf{BA})=\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$
(C) $\det\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\det\mathbf{A}$
(D) 若 $\det\mathbf{A}\ne 0$，則 $\mathbf{A}^{-1}$ 必存在

8 請問以下何者是$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{999}$的特徵值？其中$i=\sqrt{-1}$：

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $-i$

9 若 S 為$[2 \quad 0 \quad 0]$, $[0 \quad 3 \quad 1]$所生成之子空間，求向量$w=[1 \quad 1 \quad 3]$在 S 上之正交投影：

(A) $[2 \quad 18/\sqrt{10} \quad 6/\sqrt{10}]$ (B) $[1 \quad 9/5 \quad 3/5]$

(C) $[2 \quad 9/\sqrt{10} \quad 3/\sqrt{10}]$ (D) $[2 \quad 9/\sqrt{5} \quad 3/\sqrt{5}]$

10 令$\boldsymbol{x}=[1 \quad 3 \quad 2]^T$、$\boldsymbol{y_1}=[1 \quad 1 \quad 1]^T$、$\boldsymbol{y_2}=[1 \quad -1 \quad 0]^T$、$\boldsymbol{y_3}=[1 \quad 0 \quad 0]^T$且定義$L$為$R^3$至$R^3$相對於基底（basis）$[\boldsymbol{y_1} \quad \boldsymbol{y_2} \quad \boldsymbol{y_3}]$之線性轉換（linear transformation）：$L(\sum_{i=1}^{3} c_i \boldsymbol{y_i})=(2c_1+c_3)\boldsymbol{y_1}-(2c_2+c_3)\boldsymbol{y_2}+(c_1+c_2+c_3)\boldsymbol{y_3}$，則$L(\boldsymbol{x})=$？

(A) $\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

11 $\int_{-1}^{2}\int_{0}^{2x}\int_{y}^{x} dzdydx$為何？

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 6

12 有一曲面$x^2+y^2+z^2=4$，求經過點(1, 1, 1)且切於該曲面之平面方程式：

(A) $2x-y+z=2$ (B) $x-y+z=1$ (C) $x+y+z=3$ (D) $x+y-z=1$

13 若$\varphi(x,y,z)=\sin(xy)-\cos(yz)+x^2yz^3$，則其在點$P=(-\pi,0,\pi)$最陡變化方向（gradient）的旋度（curl）為何？

(A) $\pi^5\mathbf{i}-\mathbf{j}+\pi^4\mathbf{k}$ (B) $\pi^5\mathbf{i}+\mathbf{j}-\pi^4\mathbf{k}$ (C) $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (D) 0

14 若將三維空間中之曲線 C 以參數表示法表示為$x=2\cos(t)$, $y=2\sin(t)$, $z=t$；且$0\le t\le \pi$，則曲線 C 之長度為：

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi^2$ (B) $\frac{3}{2}\pi^2$ (C) $\sqrt{5}\pi$ (D) 3π

15 求解微分方程式 $xy' = \frac{y^2}{2} + y$ ，則其解為何？

(A) $y = \frac{x}{c-x}$ (B) $y = \frac{x}{2(c-x)}$ (C) $y = \frac{2x}{c-x}$ (D) $y = \frac{2}{c-x}$

16 下列何者為 $x^3dx + (y+1)^2dy = 0$ 之解？（答案選項中之 c 為任意常數。）

(A) $3x^3 + 4(y+1) = c$ (B) $3x^4 + 4(y+1) = c$ (C) $3x^3 + 4(y+1)^3 = c$ (D) $3x^4 + 4(y+1)^3 = c$

17 下列何者不為 $y'' - y' - 2y = 0$ 之解？

(A) $y = e^{-x} + e^{2x}$ (B) $y = e^{-x}$ (C) $y = e^{2x}$ (D) $y = e^{x} + e^{2x}$

18 下列何者是 $f(t) = 3t - 5\sin 2t$ 的拉氏轉換（Laplace Transform）？

(A) $\frac{3s^2 - 5s + 12}{s(s^2+4)}$ (B) $\frac{-7s^2 + 12}{s^2(s^2+4)}$ (C) $\frac{-5s^3 + 3s^2 + 12}{s^2(s^2+4)}$ (D) $\frac{-2s^2 + 12}{s^2(s^2+4)}$

19 下列何者錯誤？其中 $u(t)$ 為單位步階（unit step）函數，$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ 為拉氏轉換（Laplace Transform）

(A) $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

(B) $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s \to s-a}$

(C) $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$

(D) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{2\pi s}}{s^2+1}\} = \sin(t-2\pi)u(t-2\pi)$

20 設 $\mathbf{A}$ 為一 $n \times n$ 矩陣，且已知 $\mathbf{A}$ 的反矩陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在，則下列敘述何者錯誤？

(A) $\text{rank}\,\mathbf{A} = \text{rank}\,\mathbf{A}^{-1} = n$

(B) $\det \mathbf{A} \neq 0$ 且 $\det \mathbf{A}^{-1} \neq 0$（其中 $\det \mathbf{A}$ 表矩陣 $\mathbf{A}$ 的行列式值）

(C) $\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}$

(D)可能存在另一 $n \times n$ 矩陣 $\mathbf{B}$，且 $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}^{-1}$ ，使得 $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ （其中 $\mathbf{I}$ 為單位矩陣(identity matrix)）