104年公務人員特種考試關務人員考試、104年公務人員特種考試身心障礙人員考試及104年國軍上校以上軍官轉任公務人員考試試題

考 試 別：身心障礙人員考試
等　　別：三等考試
類　　科：電力工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　座號：________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、試利用拉氏轉換（Laplace transform）求解：（10分）

$$y'' + 5y' + 6y = \begin{cases} -2, & 0 \le t < 3 \\ 0, & t \ge 3 \end{cases} \;;\; y(0) = y'(0) = 0，其中\ y' \equiv \frac{dy}{dt}，\ y'' \equiv \frac{d^2y}{dt^2}。$$

二、考慮下列之動態系統：（每小題5分，共10分）

$$x(k+1) = Ax(k)，其中\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.95 & 0.6 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

㈠試建構矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之一組特徵基底（eigenbasis）。

㈡若 $x(0) = \begin{bmatrix} 1250 \\ 600 \\ 400 \end{bmatrix}$，試求其穩態值，即 $\lim_{k \to \infty} x(k) =$？

三、隨機變數 X、Y 之結合機率密度函數（joint probability density function）為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^3 e^{-\lambda x}, 0 \le y < x \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$$，試求：（每小題5分，共15分）

㈠邊際機率密度函數（marginal probability density function）$f_X(x) =$？

㈡ $f_{Y/X}(y/x) =$？

㈢機率 $P(Y \le 0.1 \mid X = 0.5)$ 為何？

四、施力 $\bar{F}=3y\bar{i}+3x\bar{j}+2z\bar{k}$ 沿著路徑 C 由點 P(1,2,3)出發，作用至點 Q(2,−1,4)為止，其中路徑 C 為連接 P 點與 Q 點的直線。（每小題 5 分，共 15 分）

㈠列出路徑 C 之參數表示式（parametric representation）$\bar{r}(t)$。

㈡依上述之參數表示式，算出施力 $\bar{F}$ 於路徑 C 中所作的功（work）：$W=\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$ 。

㈢已知此向量 $\bar{F}$ 可以用「純量 $f(x,y,z)$的梯度（gradient）」表示之，試找出 $f(x,y,z)$。

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　　　　　　代號：4307

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

㈡共 20 題，每題2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 令 **F**，**G**，**H** 為向量，α，β 為常數，則下列敘述何者錯誤？

(A)$\mathbf{F}+\mathbf{G}=\mathbf{G}+\mathbf{F}$　(B)$(\mathbf{F}+\mathbf{G})+\mathbf{H}=\mathbf{F}+(\mathbf{G}+\mathbf{H})$

(C)$\mathbf{F}\times\mathbf{G}=\mathbf{G}\times\mathbf{F}$　(D)$(\alpha\beta)\mathbf{F}=\alpha(\beta\mathbf{F})$

2 向量場 $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+(zx-\sin(y))\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$ 在點 $P=(-1, 0, 1)$的散度（divergence）為何？

(A) $-\sqrt{2}$　(B) -1　(C) 1　(D) $\sqrt{10}/3$

3 若 **A** 為一向量，f 為一純量，則下列敘述何者錯誤？

(A) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$　(B) $\nabla\times(\nabla f)=0$

(C) $\nabla\cdot(f\mathbf{A})=f(\nabla\cdot\mathbf{A})+\mathbf{A}\cdot\nabla f$　(D) $\nabla\times(f\mathbf{A})=\mathbf{A}\times\nabla f+f\nabla\times\mathbf{A}$

4 **F** 為一曲線之位置函數。若 **F** 為二次可微分，則其曲度（curvature）可寫成：

(A) $\dfrac{\|\mathbf{F}'\times\mathbf{F}''\|}{\|\mathbf{F}'\|}$　(B) $\dfrac{\|\mathbf{F}'\times\mathbf{F}''\|}{\|\mathbf{F}'\|^2}$　(C) $\dfrac{\|\mathbf{F}'\times\mathbf{F}''\|}{\|\mathbf{F}'\|^3}$　(D) $\dfrac{\|\mathbf{F}'\times\mathbf{F}''\|}{\|\mathbf{F}'\|^{3/2}}$

5 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -10 & 6\end{bmatrix}$, $f(x)=x^3-2x^2+x+1$ ，求行列式$|f(\mathbf{A})|$之值為何？

(A)1　(B)3　(C)4　(D)6

6 若矩陣 **A** 的特徵值（eigenvalue）為 1, −1, 1，且 **I** 代表單位矩陣，則(2**A**+**I**)**A**(**A**+2**I**)特徵值為何？

(A)8, 2, 8　(B)9, 1, 9　(C)7, −1, 10　(D)1, −1, 1

7 下列敘述何者正確？

(A) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$可以被對角化

(B)令 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$，則 $\mathbf{A}$ 對應 $\mathbf{x}$ 的特徵值為 1

(C)令 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，則 $\mathbf{A}$ 的特徵值為 $4, 2, -2$

(D)令 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，則 $\mathbf{A}$ 的特徵值為 $4, -2, -2$

8 級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-3i)^n$ 之收斂半徑 R 之值為何？（其中 $i=\sqrt{-1}$ ）

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D)4

9 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z+2|=3$，試求積分 $\int_C \frac{1}{(z+4)z^3}dz$ 為何？

(A) $\frac{\pi}{2}$　(B)0　(C)1　(D) $\frac{\pi i}{32}$

10 已知複數數列 $\{z_n\}$ 及 $\{\hat{z}_n\}$ 皆為收斂，且其極限值（limits）分別為 c 及 $\hat{c}$，則下列敘述何者錯誤？

(A)數列 $\{z_n+\hat{z}_n\}$ 為收斂，且其極限值為 $c+\hat{c}$

(B)數列 $\{z_n\hat{z}_n\}$ 為收斂，且其極限值為 $c\,\hat{c}$

(C)若 $\{z_n\}=\{k\hat{z}_n\}$，則 $c=k\hat{c}$，其中 k 為任意實數

(D)若 $c=\hat{c}$，則 $\{z_n\}=\{\hat{z}_n\}$

11 若 $y=ax^m+bx^n$ 為 $x^2y''+2xy'-6y=0$ 之解，且 $m\neq n$，則 $m+n$ 之值為何？其中 a, b, m, n 為常數，$y'\equiv\frac{dy}{dx}$，$y''\equiv\frac{d^2y}{dx^2}$。

(A) -6　(B) -2　(C) -1　(D)1

12 $\frac{dy}{dx}=e^y+\sin x$，$y(0)=0$。以 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 解之，則 $\sum_{n=0}^{2}a_n=$？

(A)1　(B) $\frac{3}{2}$　(C)2　(D) $\frac{5}{2}$

13 下列何者為微分方程式 $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{9})y=0$ 的解？其中 C_1 及 C_2 為任意常數，$J_v(x)$及 $Y_v(x)$分別為第一類型及第二類型之 v 階 Bessel 函數。

(A) $C_1J_1(\frac{x}{3})+C_2Y_1(\frac{x}{3})$
(B) $C_1J_{\frac{1}{3}}(x)+C_2Y_{\frac{1}{3}}(x)$
(C) $C_1J_1(x-\frac{1}{3})+C_2Y_1(x-\frac{1}{3})$
(D) $C_1J_{\frac{1}{3}}(x-\frac{1}{3})+C_2Y_{\frac{1}{3}}(x-\frac{1}{3})$

14 $f(t)=3t^2-e^{-t}-\int_0^t f(\alpha)\,e^{t-\alpha}d\alpha$，則 $f(t)=$？

(A) $t^3+2t^2-e^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}$
(B) $t^3+3t^2+e^{-t}-2te^{-t}$
(C) $-t^3+3t^2+1-2e^{-t}$
(D) $-t^3-2e^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}$

15 令 $F(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)^2}$，而 $f(t)=L^{-1}(F(s))$，則 $\lim_{t\to\infty}f(t)$ 之值為何？

(A) 0
(B) $\frac{1}{18}$
(C) 1
(D) ∞

16 下列何者為線性微分方程式？

(A) $\mathrm{x}^2\mathrm{y}''+e^{\mathrm{y}}=2\mathrm{x}$
(B) $\mathrm{x}^2\mathrm{y}''+2\mathrm{xy}'+\mathrm{y}=e^{\mathrm{x}}$
(C) $\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial\mathrm{x}^2}+2\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial\mathrm{x}\partial\mathrm{y}}+\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial\mathrm{y}^2}=0$
(D) $(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}})^3+\mathrm{xy}=4$

17 4 個家庭，每個家庭皆有 3 個小孩，試求至少有 3 個家庭剛好擁有 2 個女孩之機率為何？（假設小孩是男孩或女孩的機率各為 $\frac{1}{2}$）

(A) $\frac{135}{1024}$
(B) $\frac{621}{4096}$
(C) $\frac{1}{4}$
(D) $\frac{3}{8}$

18 二枚錢幣投擲出現正面之機率分別為 $\frac{1}{3}$ 及 $\frac{1}{5}$，若隨機選擇出一枚錢幣並投擲二次，試求二次皆出現正面之機率為何？

(A) $\frac{1}{30}$
(B) $\frac{1}{15}$
(C) $\frac{17}{225}$
(D) $\frac{4}{15}$

19 一容器中有 10 顆完全一樣的球分別標示為 0, 1, 2,⋯, 9，隨機從容器中取出一顆球並記下其標示之號碼，該號碼為奇數或 3 的倍數之機率為何？

(A) $\frac{1}{5}$
(B) $\frac{2}{5}$
(C) $\frac{3}{5}$
(D) $\frac{4}{5}$

20 令隨機變數 X 的累積分布為 $F(x)=\begin{cases}0, \text{當} x<0\\ 2/7, \text{當} 0\le x<1\\ 6/7, \text{當} 1\le x<2\\ 1, \text{當} 2\le x\end{cases}$，請問下列敘述何者錯誤？

(A) $P(0<x\le 2)=5/7$
(B) $P(X=1)=4/7$
(C) $P(X\le 0)=2/7$
(D) $P(X\le 1)=2/7$