代號：31050
31150
頁次：4－1

102年公務人員特種考試身心障礙人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　　　　　　　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、試利用拉氏轉換（Laplace transform）求解 $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

（其中 $x_i' \equiv \dfrac{dx_i}{dt}$，$i = 1,2$）。（15 分）

二、試求函數 $\varphi(x, y, z) = xy + yz + zx$ 於位置 $(1,2,3)$ 朝向點 $(0,1,2)$ 之方向導數。（10 分）

三、假設隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數（joint probability density function）如下：

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x + y \le 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

㈠試求 k 值。（5 分）

㈡試求隨機變數 X 的邊際分布函數（marginal distribution function）。（5 分）

㈢試計算出隨機變數 X 的期望值（mean value），亦即 $\mathrm{E}(X)$。（5 分）

四、試求出滿足方程式 $\sin z = \cosh 4$ 之所有的根，此處 $z = x + iy$ 為複數（complex number）。（10 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　　　　　　　　　　　**代號：5310**

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1　有一微分方程式 $y'' - 4y' + 4y = 0$，$y(0) = 3$，$y'(0) = 1$，下列何者為其解？

(A) $y = 3e^{-2x} - 5xe^{-2x}$　　(B) $y = 3e^{2x} - 5xe^{2x}$

(C) $y = 3e^{-2x} - 5xe^{2x}$　　(D) $y = 3e^{2x} - 5xe^{-2x}$

2 求解微分方程式 $y'' + y' + 0.5y = 0$ ，其解為？

(A) $y = c_1 e^{-0.5x} - 0.5ic_2$　(B) $y = c_1 e^{0.5x} + 0.5ic_2$

(C) $y = e^{-0.5x}(c_1 \cos 0.5x + c_2 \sin 0.5x)$　(D) $y = e^{0.5x}(c_1 \cos 0.5x - c_2 \sin 0.5x)$

3 設 $F(s) = L\{f(t)\}$ 為 $f(t)$ 之拉氏轉換，則下列何者為初值定理（Initial-Value Theorem）？

(A) $\underset{s\to 0}{Lim}[sF(s)] = f(0)$　(B) $\underset{s\to\infty}{Lim}[sF(s)] = f(0)$

(C) $\underset{s\to\infty}{Lim}[F(s)/s] = f(0)$　(D) $\underset{s\to 0}{Lim}[F(s)] = f(0)$

4 下列何者為 $y' = 1 + y^2$ ， $y(0) = 0$ 之解？

(A) $y(x) = \tan x \ (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$　(B) $y(x) = \sec x \ (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$

(C) $y(x) = \cot x \ (0 < |x| < \pi)$　(D) $y(x) = \csc x \ (0 < |x| < \pi)$

5 已知微分方程式 $x^2 y' + y = 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ 的解可表為 $y(x) = \sum_{m=0}^{3} a_m x^m$ ，試求常數 a_0 、 a_1 及 a_2 之值，並判定下列何者正確？

(A) $a_0 + a_1 + a_2 = 6$　(B) $a_0 + a_1 + a_2 = 4$

(C) $a_0 + a_1 + a_2 = 2$　(D) $a_0 + a_1 + a_2 = 0$

6 已知微分方程式 $y'' + \alpha y' + \beta y = Ke^{-3x}$ 的特解為 $y_P(x) = 2x^2 e^{-3x}$ ，試求常數 α 、 β 及 K 之值，並判定下列何者正確？

(A) $\alpha + \beta + K = 7$　(B) $\alpha + \beta + K = 13$

(C) $\alpha + \beta + K = 19$　(D) $\alpha + \beta + K = 25$

7 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）為 $L\{f(t)\}$ ，令 $F(s) = L\{t\sin(2t)\}$ ，則 $F(4)$ 等於何值？

(A) 1/100　(B) 1/50　(C) 1/25　(D) 1/10

8　假設兩向量 $\mathbf{R}_1 = p\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ； $\mathbf{R}_2 = \mathbf{i} + 8\mathbf{j} + q\mathbf{k}$ ，下列何者之 p,q 值會使 $\mathbf{R}_1$ 平行 $\mathbf{R}_2$ ？

(A) $p=-4$ ， $q=4$
(B) $p=4$ ， $q=-4$
(C) $p=-\dfrac{1}{4}$ ， $q=-4$
(D) $p=-4$ ， $q=\dfrac{1}{4}$

9　試求向量場 $\mathbf{v} = 2xy\mathbf{i} + xe^{y}\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ 的散度（divergence）：

(A) $2y\mathbf{i} + xe^{y}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
(B) $2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
(C) $2y + xe^{y} + 2$
(D) $2y + x + 2$

10　求複變函數積分 $\oint_C \dfrac{z^5}{(z+2i)^5}\,dz$ 之值，其中積分路徑 C 為複數平面上包圍點 $-2i$ 的任意逆時鐘方向封閉曲線，其中 $i=\sqrt{-1}$ 。

(A) 0
(B) 10π
(C) 20π
(D) 50π

11　複變函數 $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^4}$ 在 $z=0$ 的留數（residue）為何？

(A) $\dfrac{1}{2}$
(B) $\dfrac{1}{4}$
(C) $\dfrac{1}{6}$
(D) $\dfrac{1}{8}$

12　請計算 $e^{2+7\pi i}$ 之值，其中 $i=\sqrt{-1}$ 。

(A) e^2
(B) $-e^2$
(C) ie^2
(D) $-ie^2$

13　設 $\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ，其中 $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，求 $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ ？

(A) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t}$
(B) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t}$
(C) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-4t}$
(D) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t}$

14　設 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 為任二 $n \times n$ 矩陣，且已知 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ （其中 $\mathbf{0}$ 為零矩陣），則下列敘述何者恆真？

(A) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$
(B) $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$
(C) $\mathbf{A}^{\top}\mathbf{B}^{\top} = \mathbf{0}$
(D) $\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{\top} = \mathbf{0}$

15 設 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{C}$ 爲任三 $n \times n$ 矩陣，則下列敘述何者不恆真？

(A) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$
(B) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$
(C) $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$
(D)若 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$，則 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$

16 令 $\boldsymbol{I}$ 表示單位矩陣，右上標 T 表示轉置（transpose），下列之 $L: R^{n\times n} \to R^{n\times n}$ 不是線性轉換（linear transformation）？

(A) $L(\boldsymbol{A})=3\boldsymbol{A}$
(B) $L(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^T$
(C) $L(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$
(D) $L(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$

17 函數 $f(z)=\dfrac{-2z+3}{z^2-3z+2}$ 在 $1<|z|<2$ 的前提下可展開爲 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$，則 a_1 值爲：

(A) 0
(B) $\frac{1}{4}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) 1

18 若一粒子受 $F=(y-x^2e^x)\mathbf{i}+(\cos(2y^2)-x)\mathbf{j}$ 之力，沿以(1,1),(0,1),(1,3),(0,3)爲頂點之長方形路徑 C 順時針方向運動一圈，求 F 所作的功：

(A) 2
(B) 4
(C) 6
(D) 8

19 兩連續隨機變數 X、Y 之結合機率密度函數（joint probability density function）爲

$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 4xy, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，則下列何者錯誤？

(A) $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\times f_Y(y)$
(B) $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)+f_Y(y)$
(C) $f_{X/Y}(x,y)=f_X(x)$
(D) $f_{Y/X}(y,x)=f_Y(y)$

20 若一打雞蛋中有 3 個尚未煮熟，自該打雞蛋中隨機挑出 2 個，試求所挑出之 2 個雞蛋皆已煮熟之機率。

(A) $\frac{5}{10}$
(B) $\frac{6}{11}$
(C) $\frac{7}{12}$
(D) $\frac{8}{13}$