

臺灣警察專科學校 106 學年度專科警員班 36 期正期學生組新生入學考試乙組數學科試題

壹、單選題：(一) 30 題，題號自第 1 題至第 30 題，每題 2 分，計 60 分。

(二) 未作答者不給分，答錯者不倒扣。

(三) 請將正確答案以 2B 鉛筆劃記於答案卡內。

准考證號：\_\_\_\_\_

- 設  $x = \sqrt{9 + \sqrt{257}}$ ，則  $x$  之值在哪兩個連續整數之間？  
(A) 3 與 4 (B) 4 與 5 (C) 5 與 6 (D) 6 與 7。
- 已知有理數  $x, y$  滿足  $x\sqrt{6 - \sqrt{20}} + y\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 5 + \sqrt{5}$ ，則數對  $(x, y)$  為下列哪一個選項？  
(A)  $(-1, 1)$  (B)  $(-1, 2)$  (C)  $(-1, 3)$  (D)  $(-1, 4)$ 。
- 已知正實數  $x, y$  滿足  $3x + 4y = 24$ ，則  $xy$  的最大值為下列哪一個選項？  
(A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24。
- 設  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 10x + 10$ ，已知  $f(x)$  表成  $(x+1)$  的多項式之形式為  $f(x) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ ，則實數數組  $(a, b, c, d)$  為下列哪一個選項？  
(A)  $(1, 4, 3, 2)$  (B)  $(1, 2, 4, 3)$  (C)  $(1, 3, 4, 2)$  (D)  $(1, 2, 3, 4)$ 。
- 已知  $a, b$  為實數，且不等式  $(-3x^2 + 3x - 5)(x^2 - ax + b) \geq 0$  的解為  $-1 \leq x \leq 3$ ，則數對  $(a, b)$  為下列哪一個選項？  
(A)  $(2, 3)$  (B)  $(2, -3)$  (C)  $(-1, 3)$  (D)  $(1, -3)$ 。
- 已知  $4^x = 7$ ，則  $2^{x+3} - 8^x$  的值為下列哪一個選項？  
(A)  $\sqrt{7}$  (B)  $2\sqrt{7}$  (C)  $3\sqrt{7}$  (D)  $4\sqrt{7}$ 。
- 已知  $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x$ ，且  $f(b) - f(a) = -2$ ，則  $\frac{a}{b}$  的值為下列哪一個選項？  
(A)  $\frac{1}{5}$  (B)  $\frac{1}{25}$  (C)  $\sqrt{5}$  (D) 5。
- 設數列  $\{a_n\}$  的遞迴關係式為  $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} a_n$ ，其中  $n$  為自然數，且  $a_1 = \frac{1}{2}$ ，則  $a_{100}$  的值為下列哪一個選項？  
(A)  $\frac{1}{99}$  (B)  $\frac{1}{100}$  (C)  $\frac{1}{101}$  (D)  $\frac{1}{2}$ 。
- 設  $S = 1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + \dots + 39 \times 40$ ，則  $S$  的值為下列哪一個選項？  
(A) 11060 (B) 12000 (C) 13480 (D) 14900。
- 由數字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 所組成數字不重複的八位數中，若 1 與 2「不」相鄰，且 3 與 4 相鄰，且 5 與 6 相鄰，且 7 與 8 相鄰，滿足上述條件的八位數之個數為下列哪一個選項？  
(A) 480 (B) 576 (C) 648 (D) 720。
- 某次象棋比賽中，共有  $n$  個選手參賽，若規定參與的選手每人都必須和其他選手各比賽一場，主辦單位統計賽程總計為 78 場，則  $n$  之值為下列哪一個選項？  
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13。
- 設  $S = C_1^{11} + C_2^{11} + C_3^{11} + \dots + C_{10}^{11}$ ，則  $S$  的值為下列哪一個選項？  
(A) 55 (B) 2044 (C) 2046 (D) 2048。

13. 從 1~30 的正整數中隨機取出 3 個數，則取出的數中恰有 2 個偶數與 1 個奇數的機率為下列哪一個選項？
- (A)  $\frac{41}{116}$  (B)  $\frac{43}{116}$  (C)  $\frac{45}{116}$  (D)  $\frac{47}{116}$ 。
14. 將七個號碼球 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 隨機排成一列，已知號碼球 7 排在第六位，則號碼球 6 排在第七位的機率為下列哪一個選項？
- (A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{1}{7}$  (C)  $\frac{2}{7}$  (D)  $\frac{3}{7}$ 。
15. 已知  $\triangle ABC$  的三邊邊長  $\overline{BC}=a$ ,  $\overline{AC}=b$ ,  $\overline{AB}=c$  滿足  $a^2=b^2+c^2+bc$ , 則最大角的角度為下列哪一個選項？
- (A)  $90^\circ$  (B)  $120^\circ$  (C)  $135^\circ$  (D)  $150^\circ$ 。
16. 高空中有一氣球，為了測量此氣球的高度，在地面上找了  $A, B, C$  三點，測得氣球的仰角都是  $60^\circ$ ，且  $\overline{BC}=40$  公尺， $\angle BAC=30^\circ$ ，則氣球高度為下列哪一個選項？
- (A)  $10\sqrt{3}$  公尺 (B)  $20\sqrt{3}$  公尺 (C)  $30\sqrt{3}$  公尺 (D)  $40\sqrt{3}$  公尺。
17. 平面坐標系上，設圓  $C: (x-2)^2+(y-4)^2=9$ ，自圓外一點  $P(3,1)$  作圓  $C$  的兩切線，切點分別為  $A, B$ ，則  $\sin \angle APB$  的值為下列哪一個選項？
- (A)  $\frac{3}{\sqrt{10}}$  (B)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$  (C)  $\frac{3}{5}$  (D)  $\frac{-4}{5}$ 。
18. 平面坐標系上，設向量  $\vec{a}=(-3,1)$ ,  $\vec{b}=(-1,2)$ ，已知  $(\vec{a}+t\vec{b}) \perp \vec{a}$ ，則實數  $t$  的值為下列哪一個選項？
- (A) -1 (B) -2 (C) 1 (D) 2。
19. 平面坐標系上，由向量  $\vec{u}=(9,5)$  與  $\vec{v}=(2,7)$  所張出的平行四邊形面積為下列哪一個選項？
- (A) 53 (B) 55 (C) 57 (D) 59。
20. 空間坐標系中，已知  $A(2,5,4)$ ,  $B(6,4,5)$ ,  $C(3,6,4)$ ，則  $\angle BAC$  的角度為下列哪一個選項？
- (A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$  (C)  $60^\circ$  (D)  $90^\circ$ 。
21. 空間坐標系中，由三向量  $\vec{a}=(4,4,2)$ ,  $\vec{b}=(4,-2,2)$ ,  $\vec{c}=(2,6,2)$  所張出之平行六面體的體積為下列哪一個選項？
- (A) 12 (B) 16 (C) 18 (D) 24。
22. 空間坐標系中，平面  $E$  通過  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$ ,  $C(0,0,2)$  三點，則原點  $O(0,0,0)$  到  $E$  的距離為下列哪一個選項？
- (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{3}{4}$ 。
23. 已知聯立方程式 
$$\begin{cases} -2x+y-z=3 \\ x+2y+3z=1 \\ -x+ay+2z=b \end{cases}$$
 有無限多組解，則數對  $(a,b)$  為下列哪一個選項？
- (A) (3,4) (B) (3,5) (C) (3,6) (D) (3,7)。
24. 小明經常作罰球線投籃練習，根據過去經驗可知：若小明這次罰球投進，下次罰球也投進的機率為 0.8；若這次罰球沒投進，下次罰球也沒投進的機率為 0.6。則長期而言（達到穩定狀態時）小明罰球投進的機率為下列哪一個選項？
- (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{2}{3}$ 。
25. 平面坐標系上，拋物線  $x^2+2x+4y=11$  的焦點坐標為下列哪一個選項？
- (A) (-1,1) (B) (-1,2) (C) (-1,3) (D) (-1,4)。

26. 平面坐標系上，已知  $\sqrt{x^2+(y-3)^2} + \sqrt{x^2+(y+3)^2} = 10$  的圖形是一個橢圓，則下列哪一個選項正確？  
 (A) (0,3) 為中心 (B) (0,0) 為焦點 (C) 長軸之長度為 10 (D) 長軸在  $x$  軸上。
27. 甲、乙、丙三人射擊的命中率分別為  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ ，且三人命中靶面的事件均為獨立事件，今三人同射一靶，每人各射一發，則靶面恰中一發的機率為下列哪一個選項？  
 (A)  $\frac{7}{24}$  (B)  $\frac{11}{24}$  (C)  $\frac{3}{8}$  (D)  $\frac{5}{8}$ 。
28. 丟 1 枚均勻（正面與反面出現的機率相同）的硬幣 400 次，則正面出現次數的變異數為下列哪一個選項？  
 (A) 100 (B) 200 (C) 10 (D) 50。
29. 已知某扇形的圓心角為  $\frac{\pi}{4}$  弧度，弧長為  $3\pi$ ，則此扇形的面積為下列哪一個選項？  
 (A)  $18\pi$  (B)  $27\pi$  (C)  $36\pi$  (D)  $54\pi$ 。
30. 平面坐標系上，關於  $y = \sin(\frac{1}{2}x)$  圖形的敘述，下列哪一個選項正確？  
 (A)  $y$  的最大值為  $\frac{1}{2}$  (B)  $y$  的最小值為  $-2$  (C) 沒有通過原點(0,0) (D) 週期為  $4\pi$ 。

貳、多重選擇題：(一) 共 10 題，題號自第 31 題至第 40 題，每題 4 分，計 40 分。

(二) 每題 5 個選項各自獨立其中至少有 1 個選項是正確的，每題皆不倒扣，5 個選項全部答對得該題全部分數，只錯 1 個選項可得一半分數，錯 2 個或 2 個以上選項不給分。

(三) 請將正確答案以 2B 鉛筆劃記於答案卡內。

31. 設  $a = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}$ ， $b = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$ 。請選出正確的選項。  
 (A)  $a+b=10$  (B)  $ab=10$  (C)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 10$  (D)  $a^2+b^2=90$  (E)  $a^3+b^3=850$ 。
32. 在下列各選項中，請選出方程式  $2x^3+x^2-8x-4=0$  全部的有理根。  
 (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2 (E)  $-\frac{1}{2}$ 。
33. 平面坐標系上，關於  $y=2^x$  的圖形與其他函數圖形之間的對稱關係，請選出正確的選項。  
 (A)  $y=2^x$  的圖形與  $y=2^{-x}$  的圖形互相對稱於  $x$  軸  
 (B)  $y=2^x$  的圖形與  $y=(\frac{1}{2})^x$  的圖形互相對稱於  $y$  軸  
 (C)  $y=2^x$  的圖形與  $y=\log_2 x$  的圖形互相對稱於直線  $y=x$   
 (D)  $y=2^x$  的圖形與  $y=\log_{\frac{1}{2}} x$  的圖形互相對稱於直線  $y=x$   
 (E)  $y=2^x$  的圖形與  $y=x^2$  的圖形互相對稱於直線  $y=x$ 。

34. 關於  $(x + \frac{3}{x})^6$  的展開式中的各項係數，請選出正確的選項。
- (A)  $x^6$  項之係數為 6 (B)  $x^5$  項之係數為 0 (C)  $x^4$  項之係數為 30  
 (D)  $x^2$  項之係數為 135 (E) 常數項為 90。
35. 某班學生某次數學期中考成績不佳，平均數為 30 分，標準差為 12 分，老師決定將成績以  $y = ax + b$  的方式調整，其中  $x$  為原分數， $y$  為調整後分數， $a$  為正數；成績調整後平均數為 50 分，標準差為 6 分，請選出正確的選項。
- (A)  $a = \frac{1}{2}$  (B)  $a = 2$  (C)  $b = 20$   
 (D) 原來考 40 分的學生調整後變成 60 分 (E) 調整後變成 65 分的學生原來考 60 分。
36. 平面坐標系上，設  $P(-6, 8)$ ， $O$  為原點，若  $\overline{OP}$  與  $x$  軸正向的夾角為  $\theta$ ，請選出正確的選項。
- (A)  $\sin\theta = -\frac{4}{5}$  (B)  $\cos\theta = -\frac{3}{5}$  (C)  $\tan\theta = -\frac{4}{3}$  (D)  $\cot\theta = -\frac{3}{4}$  (E)  $\sec\theta = -\frac{5}{3}$ 。
37. 已知  $x, y$  滿足聯立不等式  $\begin{cases} -6 \leq 2x - 3y \leq 2 \\ 2 \leq 2x + y \leq 10 \end{cases}$ ，求  $x - 2y$  的最大值與最小值，請選出正確的選項。
- (A) 最大值為 0 (B) 最大值為 1 (C) 最小值為 -5 (D) 最小值為 -4 (E) 最小值為 -3。
38. 已知實數  $x, y$  滿足  $x^2 + y^2 = 100$ ，求  $3x - 4y$  的最大值與最小值，並分別求達到最大值與最小值時  $x$  與  $y$  的值，請選出正確的選項。
- (A) 最大值為 2500 (B) 最小值為 50 (C) 最小值為 -50 (D) 達最大值時  $x = 6$  (E) 達最大值時  $y = -8$ 。
39. 空間坐標系中，通過  $A(0, 1, 2)$ ， $B(-2, 3, 0)$  兩點之直線，也會通過下列哪些點？
- (A)  $(-1, 2, 1)$  (B)  $(-3, 4, -1)$  (C)  $(1, 0, 3)$  (D)  $(-10, 11, -8)$  (E)  $(-100, 101, -98)$ 。
40. 已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ，請選出正確的選項。
- (A)  $AB = BA$  (B)  $AA^{-1} = A^{-1}A$  (C)  $(AB)C = A(BC)$   
 (D)  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$  (E)  $(ABA^{-1})^{10} = AB^{10}A^{-1}$ 。