

三民輔考—地特三等 工程數學

109 年

甲、申論題部分：

一、假設 X 和 Y 為兩個獨立(independent)的隨機變數(random variables)，且 X 和 Y 之平均值(mean)均為零，變異數(variance)為 σ^2 的高斯分布(Gaussian distribution)。隨機變數 X 和 Y 的聯合機率密度函數(joint pdf)為：

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x, y < \infty$$

定義兩個新的隨機變數 R 及 Θ 如下：假設 $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 及 $\Theta = \tan^{-1}(Y/X)$ ，使得 $X = R \cos \Theta$ ，且 $Y = R \sin \Theta$ 。請證明隨機變數 R 的機率密度函數為

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right], \quad 0 \leq r < \infty。$$

【答】：

依據題目的極座標關係，代入 $x = r \cos \theta$ 及 $y = r \sin \theta$ ：

$$f_R(r, \theta) = \iint_R f_{XY}(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] r dr d\theta,$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \therefore f_R(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] r d\theta = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \cdot 2\pi = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right], \quad 0 \leq r < \infty \end{aligned}$$



二、

(一) 假設 z 為一複數，求所有的 z 使得 $\cos z = \sqrt{2}$ 。

(二) 假設 z 為一複數，計算 $\oint_C \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^4 + 4z^2} dz$ ，其中積分路徑 C 為圓 $|z - 2| = 4$ 之順時針(clockwise)方向圓周(circle)。

【答】：

(一)

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sqrt{2} \rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow e^{i2z} - 2\sqrt{2}e^{iz} + 1 = 0 \quad \therefore e^{iz} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-4}}{2} = \sqrt{2} \pm 1$$

取對數並且將角度補上 $2n\pi$ ：

$$i(z + 2n\pi) = \ln(\sqrt{2} \pm 1)$$

$$\text{因此 } z = 2n\pi + \frac{1}{i} \ln(\sqrt{2} \pm 1) = 2n\pi - i \ln(\sqrt{2} \pm 1), n \in \mathbb{Z}$$

(二)

$$\text{先計算極點: } z^4 + 4z^2 = 0 \rightarrow z^2(z^2 + 4) = 0 \quad \therefore z = \pm 2i, (\text{重})$$

$$\text{依據留數定理: } \oint_C \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^4 + 4z^2} dz = -2\pi i [\text{Res}(0) + \text{Res}(2i) + \text{Res}(-2i)]$$

(順時針定義為負)

$$\begin{aligned} \text{Res}(0) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^2 + 4} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z^2 + 4)(6z^2 + 2z) - (2z^3 + z^2 + 4) \cdot 2z}{(z^2 + 4)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Res}(2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^2(z + 2i)} = 1$$

$$\text{Res}(-2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^2(z - 2i)} = 1$$

$$\text{故 } \oint_C \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^4 + 4z^2} dz = -2\pi i \times (0 + 1 + 1) = -4\pi i$$

三、

(一) 已知一 RC 電路系統可由微分方程式(differential equation)

$$\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = 5x(t)$$
 表示，其中 $x(t)$ 為輸入，且 $y(t)$ 為輸出。假設

$$x(t) = \frac{3}{5}e^{-2t}u(t)$$
 ，且初始條件(initial condition) $y(0^-) = -2$ ，求 $y(t)$ 。
(二) 已知一訊號 $x(t)$ 的單邊拉普拉斯轉換(unilateral Laplace transform)為：

$$X(s) = e^{-2s} \frac{2s^2 + 1}{s(s+2)^2}$$

請求該訊號 $x(t)$ 的初值(initial value)及終值(final value)。

【答】：

(一) 對微分方程取拉普拉斯轉換：令 $L\{y(t)\} = Y(s)$

$$L\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\} + L\{5y(t)\} = L\{3e^{-2t}u(t)\} \rightarrow sY(s) - y(0) + 5Y(s) = \frac{3}{s+2}$$

$$\rightarrow (s+5)Y(s) = \frac{3}{s+2} - 2 = \frac{-3(s+1)}{s+2}$$

$$\therefore Y(s) = \frac{-3(s+1)}{(s+2)(s+5)} = \frac{1}{s+2} + \frac{-4}{s+5}$$

$$\text{因此： } y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = e^{-2t} - 4e^{-5t}$$

(二) 依據初值定理及終值定理：

$$\text{初值： } \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) : \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-2s} \frac{2s^2 + 1}{(s+2)^2} = 0$$

$$\text{終值： } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) : \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} e^{-2s} \frac{2s^2 + 1}{(s+2)^2} = \frac{1}{4}$$



四、

(一) (a) 求 k 使得 $Ax = b$ ，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ ， $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \\ k \end{bmatrix}$ 。

(b) 如(a)小題，求矩陣 A 的行列式值 (determinant)。

(二) 請求以下線性系統的解 $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 + x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + 3x_2 - x_3 \end{cases}$ 其中 $x_1(0) = 1$ ， $x_2(0) = 0$ 及

$$x_3(0) = \frac{1}{2}。$$

【答】：

(一)

(a) 利用高斯消去法計算聯立方程組。

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 10 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & k-3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & k - \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

若原聯立方程組有解，則最後兩列必須平行，故 $k - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$ $\therefore k = \frac{5}{2}$

(b)經由高斯消去法之列加法操作後，行列式不變，因此：

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{上三角矩陣而且對角線有 } 0)$$

(二) 利用對角化解聯立 ODE： $\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} x$

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \lambda = 3, 1, -$$

$$(1) \text{ If } \lambda = 3: A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \therefore e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \text{ If } \lambda = 1: A - I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \therefore e_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \text{ If } \lambda = -2: A + 2I = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore e_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\text{故此聯立 ODE 之解為 } x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$\text{最後由初始條件： } x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ 可得特解為}$$

$$x(t) = \frac{7}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t - \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} e^{-2t}$$



乙、測驗題部分：

- (A) 1. 對稱矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ，其對角化矩陣(diagonal matrix) $D = PAP^{-1}$ ，其中 P 是正交矩陣，求 $D = ?$

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

【解析】

由特徵值直接判斷即可。 $tr(A) = 1 + 0 + 4 = 5$ ，代表 $tr(D) = 5$ ，因為此對角線矩陣之對角線元素即為原矩陣 A 之特徵值。滿足此關係者只有(A)。

- (C) 2. 矩陣 A 和 B ，令 $\det A = 6$ 和 $\det B = 2$ ，求 $\det AB^{-1} = ?$
(A) 12 (B) 6 (C) 3 (D) 0

【解析】

$$\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)} = 3$$

- (D) 3. 設 $\vec{a}$ 為常數向量(constant vector)， $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ，

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}，下列何者錯誤？$$

(A) $\nabla \cdot \vec{r} = 3$ (B) $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{r}) = 0$ (C) $\nabla \times \vec{r} = 0$ (D) $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{r}) = \vec{a}$

【解析】

(D) $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{r}) = (\nabla \cdot \vec{r})\vec{a} - (\nabla \cdot \vec{a})\vec{r} = 3\vec{a}$ ，因此錯誤。

- (B) 4. 求 $\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xydx + x^2dy = ?$

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25

【解析】

$\vec{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2 \rangle$ 是守恆場，故可求出對應的位勢函數 $\phi(x, y) = x^2y + c$

因此 $\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xydx + x^2dy = \phi(2, 4) - \phi(1, 1) = 15$ ，答案選(B)。

(C) 5. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 求 $e^{At} = ?$

(A) $\begin{bmatrix} 2e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{bmatrix}$

【解析】

求出 A 的特徵多項式： $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

令 $e^{At} = \alpha A + \beta I$

(1) $\lambda = 1: e^t = \alpha + \beta$

(2) $\lambda = -1: e^{-t} = -\alpha + \beta$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \quad \beta = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

故 $e^{At} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$, 答案選(C)。

(B) 6. 下列矩陣何者的秩(rank)等於 2。

(A) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 7 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

【解析】

(A) 只有一排 0 列, rank = 1



$$(B) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 7 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 13 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 13 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} = 2$$

$$(C) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} = 1$$

$$(D) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} = 1$$

- (C) 7. 下列那一個是適合的積分因子(integrating factor)，乘上它以後，將使微分方程式 $(x+y)dx + x \ln x dy = 0$ 變成正合(exact)？

(A) x (B) 3 (C) $\frac{1}{x}$ (D) $\frac{1}{x^2}$

【解析】

用純 x 的積分因子公式計算： $I(x) = e^{\int f(x)dx}$ ， $f(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$

$$f(x) = \frac{1 - \ln x - 1}{x \ln x} = -\frac{1}{x} \quad (O) \quad \therefore I(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

- (D) 8. 微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$ ，其中 $y(0) = 2$ ， $y'(0) = 6$ 。以拉普拉斯轉換

換(Laplace transform)求解後得到 $Y(s) = \frac{2(s-c)^d + 2}{(s-a)^b}$ ，則下列何者錯誤？

(A) $a+b+c+d=15$ (B) $a+b+c-d=7$
(C) $a-b-c+d=-1$ (D) $-a+b-c+d=-3$

【解析】

取拉普拉斯轉換：

$$L\{y'' - 6y' + 9y\} = L\{t^2 e^{3t}\}$$

$$\rightarrow [s^2 Y - sy(0) - y'(0)] - 6[sY - y(0)] + 9Y = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$\rightarrow (s^2Y - 2s - 6) - 6(sY - 2) + 9Y = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$\rightarrow (s^2 - 6s + 9)Y = \frac{2}{(s-3)^3} + 2s - 6$$

$$\rightarrow (s-3)^2Y = \frac{2+2(s-3)^4}{(s-3)^3} \quad \therefore Y(s) = \frac{2+2(s-3)^4}{(s-3)^5}$$

對照題目可知 $(a, b, c, d) = (3, 5, 3, 4)$ ，因此錯誤的為(D)。

- (A) 9. 設 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 為函數 $f(x) = x^3$ ， $-\pi < x < \pi$ 之傅

立葉級數(Fourier series)，其中 a_0 ， a_n ， b_n 為常數，下列何者正確？

- (A) $a_0 + b_n \neq 0$ (B) $a_0 + a_n \neq 0$ (C) $a_0 \cdot b_n \neq 0$ (D) $a_0 \neq 0$

【解析】

由於此週期函數是奇函數展開，故 $a_0 = a_n = 0$ ，因此正確者只有(A)。

- (D) 10. 設 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$ 為微分方程 $y''' + ay'' + by' + cy = 0$ 的通解 (general solution)，其中 a, b, c, c_1, c_2, c_3 為常數，下列何者正確？

- (A) $a = -1$ (B) $b = -1$ (C) $c = -1$ (D) $a + b + c = -1$

【解析】

由通解 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$ 可知輔助方程式之三根為 $\alpha = 1, -2$ (重)，

對應原本的輔助方程式為 $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ，由根與係數關係可知 $(a, b, c) = (3, 0, -4)$ ，因此正確者為(D)。

- (D) 11. 求積分方程 $f(t) = \cos t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau) d\tau$ 的解。

- (A) $1 - \sin t$ (B) $1 + \sin t$ (C) $\cos t - \sin t$ (D) $\cos t + \sin t$

【解析】

利用摺積之定義，對原積分方程取拉普拉斯轉換。

$$L\{f(t)\} = L\{\cos t\} + L\left\{\int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau) d\tau\right\}$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2+1} + L\{e^{-t} * f(t)\} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s+1} F(s)$$

$$\therefore F(s) = \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$



故 $f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right\} = \cos t + \sin t$ ，答案選(D)。

(D) 12.

令連續隨機函數X具有機率密度函數 $f(x) = \begin{cases} kx^2, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$ ，求其變異數

(variance) σ^2 。(其中k為常數)

(A) $\frac{1}{40}$ (B) $\frac{3}{40}$ (C) $\frac{1}{80}$ (D) $\frac{3}{80}$

【解析】

先將機率密度函數正規：

$$\int_0^1 f(x)dx = 1: \int_0^1 kx^2 dx = \left[\frac{1}{3}kx^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}k = 1 \quad \therefore k = 3$$

依據定義： $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^1 x^2 (kx^2) dx = 3 \int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{5}$$

$$\langle x \rangle = \int_0^1 x (kx^2) dx = 3 \int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{4}$$

故 $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}$ ，答案選(D)。

(C) 13. 令連續二維隨機變數X和Y具有機率密度函數

$f(x, y) = \begin{cases} kxy, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$ ，求其機率 $P(x > 0.25, y > 0.5)$ 。(其

中k為常數)

(A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{9}{16}$ (C) $\frac{45}{64}$ (D) $\frac{75}{128}$

【解析】

先將機率密度函數正規：

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = 1: \int_0^1 \int_0^1 kxy dx dy = k \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = \frac{1}{4}k = 1 \quad \therefore k = 4$$

$$\therefore P(x > 0.25, y > 0.5) = \int_{0.5}^1 \int_{0.25}^1 4xy dx dy = [x^2]_{0.25}^1 \times [y^2]_{0.5}^1$$

$$= \frac{15}{16} \times \frac{3}{4} = \frac{45}{64}$$

答案選(C)。

- (A) 14. 求複變函數積分 $\oint_C \left(\frac{\cosh z}{(z-\pi)^3} - \frac{\sin^2 z}{(2z-\pi)^3} \right) dz$ ，其中積分路徑C為逆時鐘方向繞圓周 $|z|=3$ 。

(A) $\frac{\pi}{4}i$ (B) $-\frac{\pi}{4}i$ (C) $\frac{\pi}{2}i$ (D) $-\frac{\pi}{2}i$

【解析】

Pole 為 $z=\pi$ (3階) 以及 $z=\frac{\pi}{2}$ (3階)，但是 $z=\pi$ 在圍線之外，因此不用考慮。

$$\oint_C \left(\frac{\cosh z}{(z-\pi)^3} - \frac{\sin^2 z}{(2z-\pi)^3} \right) dz = - \oint_C \frac{\sin^2 z}{(2z-\pi)^3} dz = -\frac{1}{8} \oint_C \frac{\sin^2 z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3} dz$$

依據柯西積分公式：

$$\oint_C \frac{\sin^2 z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (\sin^2 z) \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = \pi i [2\cos^2 z - 2\sin^2 z] \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -2\pi i$$

故 $\oint_C \left(\frac{\cosh z}{(z-\pi)^3} - \frac{\sin^2 z}{(2z-\pi)^3} \right) dz = -\frac{1}{8} \times (-2\pi i) = \frac{\pi}{4}i$ ，答案選(A)。

- (C) 15. 求複變函數積分 $\oint_C \frac{z}{(z+1)(z^2+1)} dz$ ，其中積分路徑C為逆時鐘方向繞橢圓周 $16x^2 + y^2 = 4$ 。

(A) $2\pi i$ (B) $-2\pi i$ (C) πi (D) $-\pi i$

【解析】

Pole 為 $z=-1, \pm i$ ，但是 $z=-1$ 在圍線之外，因此不用考慮。

$$\oint_C \frac{z}{(z+1)(z^2+1)} dz = \oint_C \left[\frac{-\frac{1}{2}}{z+1} + \frac{\frac{1}{2}z+1}{z^2+1} \right] dz = \frac{1}{2} \oint_C \frac{z+1}{z^2+1} dz$$

$$\text{Res}(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z+1}{z+i} = \frac{i+1}{i+i} = \frac{-i}{2} (1+i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{Res}(-i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z+1}{z-i} = \frac{-i+1}{-i-i} = \frac{i}{2} (1-i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$



故 $\oint_C \frac{z}{(z+1)(z^2+1)} dz = \frac{1}{2} \times 2\pi i [(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)] = \pi i$ ，答案選(C)。

- (A) 16. 複數函數 $f(z) = z^{24} - 3z^{20} + 4z^{12} - 5z^6$ ，求 $f(\frac{1+i}{\sqrt{2}}) = ?$

(A) $5i$ (B) $4i$ (C) $3i$ (D) $2i$

【解析】

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (\text{只考慮主值})$$

$$\therefore f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = (e^{i\frac{\pi}{4}})^{24} - 3(e^{i\frac{\pi}{4}})^{20} + 4(e^{i\frac{\pi}{4}})^{12} - 5(e^{i\frac{\pi}{4}})^6$$

$$= e^{i6\pi} - 3e^{i5\pi} + 4e^{i3\pi} - 5e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$= 1 - 3(-1) + 4(-1) - 5(-i) = 5i, \text{ 答案選(A)。}$$

- (D) 17. z 為一複數，若 Γ 是平面中一個包含原點 $z=0$ 之封閉路徑， $\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz = ?$

(A) 0 (B) $-i2\pi$ (C) 2π (D) $i2\pi$

【解析】

利用柯西積分公式：

$$\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i [\cos z]_{z=0} = 2\pi i, \text{ 答案選(D)。}$$

- (C) 18. 曲線 C 為平面上一個正向簡單封閉路徑，則 $\oint_C x \cos 2y dx - x^2 \sin 2y dy = ?$

(A) $4x \sin 2y$ (B) $2x \sin 2y$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}(x^2 \cos 2y + x^2 \cos 2y)$

【解析】

檢查是否正合：

$$\frac{\partial}{\partial y}(x \cos 2y) = -2x \sin 2y, \quad \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 \sin 2y) = -2x \sin 2y \rightarrow \text{Exact!}$$

因此對於任意封閉路徑且不含奇異點之線積分，其值必為0，答案選(C)。

- (C) 19. 令一曲線 C 為 $x=t^2, y=-t, z=t^2, 0 \leq t \leq 1$ ，則 $\int_C x^2 dx - yz dy + e^z dz = ?$

(A) $e + \frac{1}{12}$ (B) $e - \frac{1}{12}$ (C) $e - \frac{11}{12}$ (D) $e + \frac{11}{12}$

【解析】

直接計算線積分：令 $\vec{r}(t) = \langle t^2, -t, t^2 \rangle \rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \langle 2t, -1, 2t \rangle$ 或

$$d\vec{r} = \langle 2t, -1, 2t \rangle dt$$

$$\int_C x^2 dx - yz dy + e^z dz$$

$$= \int_0^1 [(t^4)(2tdt) - (-t^3)(-dt) + e^{t^2}(2tdt)]$$

$$= \int_0^1 (2t^5 - t^3 + 2te^{t^2}) dt = \left[\frac{1}{3}t^6 - \frac{1}{4}t^4 \right]_0^1 + \int_0^1 e^{t^2} d(t^2)$$

$$= \frac{1}{12} + (e^1 - e^0) = e - \frac{11}{12}, \text{ 答案選(C) }。$$

- (B) 20. 下表所示為x及y機率質量函數(probability mass function, PMF)，則X與Y之共變異數 $COV(X, Y) = ?$

	$x_1 = 1$	$x_2 = 0$	$x_3 = -1$
$y_1 = 1$	0	1/4	1/4
$y_2 = -1$	1/4	1/4	0

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) -1 (D) 1

【解析】

可建立出X、Y及XY的PMF：

X	1	0	-1
P_X	1/4	1/2	1/4

Y	1	-1
P_Y	1/2	1/2

XY	1	0	-1
P_{XY}	0	1/2	1/2

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{4} = 0$$