三民輔考－地特三等　工程數學

108 年

甲、申論題部分：

一、求通解(general solution)為 $c_1e^x+c_2xe^x+x^2e^x$ 的二次微分方程式，其中 c_1 及 c_2 為任意常數。

【答】：

從齊次解（e^x 以及重根）可以推測原本微分方程的左半邊之輔助方程式為 $(\alpha-1)^2=0$，代表原微分方程之齊次部分為 $y''-2y'+y=0$，並將外力項加入後可表示成 $y''-2y'+y=r(x)$。

最後將特解 $y_p(x)=x^2e^x$ 代回：

$$y''-2y'+y=(2e^x+4xe^x+x^2e^x)-2(2xe^x+x^2e^x)+x^2e^x=2e^x$$

最後整理得到原本微分方程: $y''-2y'+y=2e^x$

二、求週期為 2T 的函數，$f(x)=\begin{cases}\cos(\pi x/T),0\le x<T\\ 0,T\le x<2T\end{cases}$，且 $f(x+2T)=f(x)$ 拉普拉斯轉換（Laplace transform）。

【答】：

藉由週期 p 之週期函數的拉普拉斯轉換: $\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{\int_0^p f(t)e^{-st}dt}{1-e^{-sp}}$。

直接代入計算。

$$\mathcal{L}\{f(x)\}=\frac{\int_0^{2T} f(x)e^{-st}dt}{1-e^{-2sT}}=\frac{\int_0^{T}\cos\frac{\pi x}{T}e^{-sx}dx}{1-e^{-2sT}}$$

其中的分子積分，利用分部積分計算得：

$$\int_0^T \cos\frac{\pi x}{T}e^{-sx}dx=[-\frac{1}{s}\cos\frac{\pi x}{T}e^{-sx}+\frac{\pi}{s^2T}\sin\frac{\pi x}{T}e^{-sx}]\Big|_0^T-\frac{\pi^2}{s^2T^2}\int_0^T\cos\frac{\pi x}{T}e^{-sx}dx$$

$$\rightarrow (1+\frac{\pi^2}{s^2T^2})\int_0^T\cos\frac{\pi x}{T}e^{-sx}dx=(\frac{\pi^2+s^2T^2}{s^2T^2})\int_0^T\cos\frac{\pi x}{T}e^{-sx}dx=\frac{1}{s}e^{-sT}+\frac{1}{s}$$

$$\therefore \int_0^T\cos\frac{\pi x}{T}e^{-sx}dx=(\frac{1}{s}e^{-sT}+\frac{1}{s})(\frac{s^2T^2}{\pi^2+s^2T^2})$$

故此函數之拉普拉斯轉換為：

$$L\{f(x)\}=\frac{\int_0^T\cos\frac{\pi x}{T}e^{-sx}dx}{1-e^{-2sT}}=\frac{sT^2}{\pi^2+s^2T^2}\cdot\frac{1+e^{-sT}}{1-e^{-2sT}}=\frac{sT^2}{\pi^2+s^2T^2}(1-e^{-sT})$$

三、若$\cos(3+2i)=a+ib$，求 a 及 b。

【答】：

由公式 $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$：

$$\cos(3+2i)=\frac{e^{3i-2}+e^{-(3i-2)}}{2}=\frac{1}{2}(e^{-2}e^{3i}+e^{2}e^{-3i})=\frac{1}{2}[e^{-2}(\cos 3+i\sin 3)+e^{2}(\cos 3-i\sin 3)]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-2}\cos 2+e^{2}\cos 3)+i\frac{1}{2}(e^{-2}\sin 3-e^{2}\sin 3)$$

故 $a=\frac{1}{2}(e^{-2}\cos 2+e^{2}\cos 3)$ 及 $b=\frac{1}{2}(e^{-2}\sin 3-e^{2}\sin 3)$

四、求$\oint_\gamma \dfrac{z}{(z+2)(z-4i)}dz$，其中$\gamma$為$|z|=5$的圓。

【答】：

$z=-2$ 及 $z=4i$ 皆在圍線內。根據留數定理：

$$\oint_\gamma \frac{z}{(z+2)(z-4i)}dz=2\pi i[Res(-2)+Res(4i)]$$

$$=2\pi i[\lim_{z\to -2}\frac{z}{z-4i}+\lim_{z\to 4i}\frac{z}{z+2}]=2\pi i\times(\frac{-2}{-2-4i}+\frac{4i}{2+4i})$$

$$=2\pi i\times(\frac{1}{1+2i}+\frac{2i}{1+2i})=2\pi i\times\frac{1+2i}{1+2i}=2\pi i$$

五、 $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ **及** $B=\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 7\end{bmatrix}$ **，求 x，**

使得 $\|Ax-B\|$ **最小(Least square solution)。**

【答】：

最小方差法的算法只要在原矩陣方程式左乘 A^T

即可求出： $A^TAx-A^Tb=0$

$$A^T=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix}\ \rightarrow\ \begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 7\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ \begin{bmatrix}6 & 10\\ 10 & 24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 10\\ 10 & 24\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}9\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{44}\begin{bmatrix}24 & -10\\ -10 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{44}\begin{bmatrix}216\\ -90\end{bmatrix}=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}108\\ -45\end{bmatrix}$$

乙、測驗題部分：

（C）1. 令u = i − j − k；；v = −3i + 4j + 6k；w = −2i − 4j + 2k，則由 u，v 及 w 所形成的平行立方體(parallelepiped)體積為何？

(A) 9 (B) $9\sqrt{2}$ (C) 18 (D) $18\sqrt{2}$

【解析】

平行六面體的體積計算方法即為三向量之純量三重積。

$$V=\left|\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C})\right|=\left\|\begin{matrix}1 & -1 & -1\\ -3 & 4 & 6\\ -2 & -4 & 2\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -6 & 0\end{matrix}\right\|=1\times(18)=18$$

（C）2. $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 3\end{bmatrix}$，試問∀∈ R³，$\dfrac{x^TAx}{x^Tx}$之最大值為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【解析】

本題考的是 Rayleigh quotient rule，此函數的極值正好對應原矩陣特徵值的極值。因此本題要找指定函數的最大值，只要找 A 的特徵值中的最大值即可。

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & -1\\ -2 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \rightarrow \lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0 \rightarrow$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0 \qquad \therefore \lambda=3,2,1$$

因此最大的特徵值為 3，故$\dfrac{x^TAx}{x^Tx}$之最大值也是 3。

（C）3. 令矩陣 $A=\begin{bmatrix}5 & 10 & -10\\ 10 & 5 & -20\\ 5 & -5 & -10\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}a & b & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & c\end{bmatrix}$，且 $P^{-1}AP=D$，其中 D 為一 3×3 對角矩陣(diagonal matrix)，下列敘述何者正確？

(A) $a+b+c=5$ (B) $a\times b\times c=4$ (C) $a-b-c=0$ (D) $\dfrac{a\times b}{c}=1$

【解析】

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 & -10 \\ 10 & 5-\lambda & -20 \\ 5 & -5 & -10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^3 - 225\lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda^2 - 225) = 0$$

$\therefore \lambda = \pm 15, 0$

(1) $\lambda = 15$:

$$A - 15I = \begin{bmatrix} -10 & 10 & -10 \\ 10 & -10 & -20 \\ 5 & -5 & -25 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 : x_2 : x_3 = -300 : -(300) : 0 = 1:1:0$$

$$\therefore e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda = -15$:

$$A + 15I = \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 \\ 10 & 20 & -20 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 : x_2 : x_3 = 0 : -(-300) : 300 = 0:1:1$$

$$\therefore e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) $\lambda = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -10 \\ 10 & 5 & -20 \\ 5 & -5 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 : x_2 : x_3 = -150 : -(0) : -75 = 2:0:1$$

$$\therefore e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

對照 $P = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix}$ 可得 $(a,b,c) = (2,1,1)$，故正確答案為(C)。

（B） 4. 已知 A 為$m\times n$矩陣且$rank(A)=r$，下列敘述何者正確？

(A) $Ax=0$的解空間（solution space）維度（dimension）為$m-r$

(B)若$m=n=r$且 x 為$n\times 1$未知矩陣，則$Ax=0$存在唯一解

(C)若$m=n=r$，則 A 的列向量（row vector）彼此間都是線性相依（linear independent）

(D)若$m>n>r$，則 A 的列向量（row vector）彼此間都是線性獨立（linear dependent）

【解析】

(A)解空間的維度是$n-r$。

(B)A 滿秩表示存在反矩陣，因此 x 是唯一零解。

(C)A 滿秩表示各列為線性獨立。

(D)由於$m>n>r$，表示存在自由度，故存在非零解，因此列向量線性相依。

（C） 5. 求矩陣有$A=\begin{bmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$幾個線性獨立之特徵向量？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【解析】

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_{12}^{(-3)}}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&-8&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

可知經由高斯消去法後，沒有零列，因此$rank(A)=3$。

（B） 6. $A=\begin{bmatrix}0&-2\\1&3\end{bmatrix}$，令$e^A=[a_{ij}]_{2\times 2}$，則$a_{11}+a_{22}=?$

(A) $e-e^2$ (B) $e+e^2$ (C) $-e+e^2$ (D) $2e-e^2$

【解析】

利用 Cayley-Hamilton theorem，設$e^A=\alpha A+\beta I$

$$\begin{vmatrix}0-\lambda&-2\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=0 \rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \quad \therefore \lambda=2,1$$

(1) $\lambda=2$: $e^2=2\alpha+\beta$

(2) $\lambda=1$: $e=\alpha+\beta$

$\therefore \alpha=e^2-e,\ \beta=2e-e^2$

故 $e^A=(e^2-e)A+(2e-e^2)I=(e^2-e)\begin{bmatrix}0 & -2\\1 & 3\end{bmatrix}+(2e-e^2)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2e-e^2 & -2e^2+2e\\e^2-e & 2e^2-e\end{bmatrix}$$

因此 $a_{11}+a_{22}=(2e-e^2)+(2e^2-e)=e^2+e$，答案選(B)。

（D）7. 下列何者為 $(-64)^{\frac{1}{4}}$ 的複數根？

(A) $-1-i$ (B) $-2-i$ (C) $-1-2i$ (D) $-2-2i$

【解析】

$$z=(-64)^{\frac{1}{4}}=\{64[\cos(\pi+2n\pi)+i\sin(\pi+2n\pi)]\}^{\frac{1}{4}}$$

$$=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi+2n\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2n\pi}{4})$$

$n=0,1,2,3$

將 n 值代入：

$$z_1=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=2+2i,$$

$$z_2=2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=-2+2i$$

$$z_3=2\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})=-2-2i,$$

$$z_4=2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})=2-2i$$

因此答案為(D)。

（A）8. $\ln(1-\sqrt{3}i)=?$

(A) $2+i(-\frac{\pi}{3}+2n\pi)$，其中 n 為任意整數

(B) $2+i(-\frac{\pi}{6}+2n\pi)$，其中 n 為任意整數

(C) $2+i(\frac{2\pi}{3}+2n\pi)$，其中 n 為任意整數

(D) $2+i(\frac{5\pi}{6}+2n\pi)$，其中 n 為任意整數

【解析】

由極式拆解: $\ln z=\ln(re^{i\theta})=\ln r+i\theta$

$$\ln(1-\sqrt{3}i)=\ln[2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)]=\ln[2e^{i(\frac{-\pi}{3}+2n\pi)}]=\ln 2+i(\frac{-\pi}{3}+2n\pi)$$

本題實部可能有誤，虛部相符者為(A)。

（B）9. 求 $\int_{\varphi} z^2dz$，沿著路徑 $\varphi=t+it$，$0\le t\le 2$ 積分之值：

(A) $\frac{32}{3}(i-1)$ (B) $\frac{16}{3}(i-1)$ (C) $\frac{8}{3}(i-1)$ (D) $\frac{4}{3}(i-1)$

【解析】

由反導函數存在定理:

$$\int_{\varphi} z^2dz=\int_{(0,0)}^{(2,2)} z^2dz=[\frac{1}{3}z^3]\Big|_0^{2+2i}=\frac{1}{3}(2+2i)^3=\frac{8}{3}(1+i)^3$$

$$=\frac{8}{3}(1+i)^3=\frac{8}{3}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^3=\frac{8}{3}(2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})=\frac{16}{3}(-1+i)$$，故答案選(B)。

（A）10. 假設 $f(z)=\frac{1}{z}$，求 $\oint_C f(z)dz$ 之值，C 為 $|z-2|=1$ 之逆時針之圓周。

(A) 0 (B) $2\pi i$ (C) $-2\pi i$ (D) $4\pi i$

【解析】圍線 C 沒有包到極點($z=0$)，因此複數積分為 0。

（C）11. 假設 $k_1e^{ax}+k_2e^{bx}+e^{cx}$ 為微分方程式 $y''-6y'+8y=3e^x$ 的解，則 $a+b+c$ 為何？

(A) -6 (B) -4 (C) 7 (D) 9

【解析】

(1)求 y_h: $\alpha^2-6\alpha+8=0 \rightarrow \alpha=4,2$

$\therefore y_h(x)=c_1e^{4x}+c_2e^{2x}$

(2)求 y_p:

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-6D+8}(3e^x)=\frac{1}{1-6+8}(3e^x)=e^x$$

故通解為 $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=c_1e^{4x}+c_2e^{2x}+e^x$，對照題目可得 $(a,b,c)=(4,2,1)$，因此答案為(C)。

（A） 12. 假設路徑 C 是一逆時針的正方形，其各邊位於直線 $x=\pm 2$ 和 $y=\pm 2$ 之上。試求出 $\int_C \frac{e^{-z}}{z-\frac{\pi i}{2}}dz$ 值為何？

(A) 2π (B) π (C) $-\pi i$ (D) 1

【解析】

由柯西積分公式: $\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a)$，取 $f(z)=e^{-z}$。

$\therefore \int_C \frac{e^{-z}}{z-\frac{\pi i}{2}}dz = 2\pi i e^{-\frac{\pi i}{2}} = 2\pi i(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}) = 2\pi i\cdot(-i) = 2\pi$，故答案選(A)。

（B） 13. 給定一組微分方程式 $x_1' = -x_2$，$x_2' = 1.01x_1 - 0.2x_2$，起始值為 $x_1(0)=0$，$x_2(0)=-1$，則 $\lim_{t\to\infty} x_2(t) = ?$

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D)無窮大

【解析】

由 $x_1' = -x_2$: $x_1 = -\int_0^t x_2 d\tau \rightarrow x_2' = -1.01\int_0^t x_2 d\tau - 0.2x_2$

取拉普拉斯轉換:設 $L\{x_2(t)\} = X_2(s)$，則:

$L\{x_2'\} = L\{-1.01\int_0^t x_2 d\tau - 0.2x_2\} \rightarrow sX_2 - x_2(0) = -1.01\frac{X_2}{s} - 0.2X_2$

$\rightarrow X_2(s) = \frac{-s}{s^2+0.2s+1.01} = \frac{-s}{(s+0.1)^2+1} = \frac{-(s+0.1)}{(s+0.1)^2+1} + \frac{0.1}{(s+0.1)^2+1}$

由第一位移定理:

$x_2(t) = L^{-1}\{X_2(s)\} = -e^{-0.1t}\cos t + 0.1e^{-0.1t}\sin t$

故 $\lim_{t\to\infty} x_2(t) = \lim_{t\to\infty}(-e^{-0.1t}\cos t + 0.1e^{-0.1t}\sin t) = 0$，答案選(B)。

（C） 14. 令 $F(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2+1)}$，試求 $F(s)$ 之反拉普拉斯轉換（inverse Laplace transform） $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$?

(A) $1-\sin t+\cos t$，$t>0$ (B) $t+\sin t-\cos t$，$t>0$

(C) $1+t-\sin t-\cos t$，$t>0$ (D) $1+t+\sin t+\cos t$，$t>0$

【解析】

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2(s^2+1)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{-s-1}{s^2+1}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}$$

$\therefore f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\{\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}\}=1+t-\cos t-\sin t$，

答案選(C)。

（B）15. 下列何者為偏微分方程式$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\frac{\partial u}{\partial y}$的解？以下$c_1$，$c_2$，$\alpha$為常數。

(A) $u(x,y)=c_1e^K\cos 2\alpha x+c_2e^K\sin 2\alpha x$，其中$K=a^2y$

(B) $u(x,y)=c_1e^K\cosh 2\alpha x+c_2e^K\sinh 2\alpha x$，其中$K=a^2y$

(C) $u(x,y)=c_1e^T\cos 2\alpha y+c_2e^T\sin 2\alpha y$，其中$T=a^2x$

(D) $u(x,y)=c_1e^T\cosh 2\alpha y+c_2e^T\sinh 2\alpha y$，其中$T=a^2x$

【解析】

y 的偏導數為一階，因此不會週期振盪。將(A)和(B)直接微分對照可發現(B)滿足原方程式。

（B）16. 求$\frac{1}{s^2}(\frac{s-1}{s+1})$之反拉普拉斯轉換為下列何者？

(A) $-2e^{-t}+t+2$　(B) $-2e^{-t}-t+2$

(C) $-2e^{-t}+t-2$　(D) $-2e^{-t}-t-2$

【解析】

$$F(s)=\frac{1}{s^2}(\frac{s-1}{s+1})=\frac{2}{s}+\frac{-1}{s^2}+\frac{-2}{s+1}$$

$\therefore f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\{\frac{2}{s}+\frac{-1}{s^2}+\frac{-2}{s+1}\}=2-t-2e^{-t}$，答案選(B)。

（C）17. 已知函數$x(t)$其傅立葉轉換為$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$，且

$|X(j\omega)|=2[u(\omega+3)-u(\omega-3)]$，$\measuredangle X(j\omega)=-\frac{3}{2}\omega+\pi$

其中方程式$u(\omega)=\begin{cases}1,\omega\ge 0\\0,\omega<0\end{cases}$，請問 t 為下列何者時，$x(t)=0$？

(A) $\frac{1}{2}+\pi$　(B) $1+\frac{\pi}{2}$　(C) $\frac{3}{2}+\frac{\pi}{3}$　(D) $2+\frac{\pi}{4}$

【解析】

依據反轉換定義: $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}2[u(\omega+3)-u(\omega-3)]e^{i(\frac{-3}{2}\omega+\pi)}e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\int_{-3}^{3}2e^{i(\frac{-3}{2}\omega+\pi)}e^{i\omega t}d\omega=-2\int_{-3}^{3}e^{i(t-\frac{3}{2})\omega}d\omega=\frac{-2}{i(t-\frac{3}{2})}e^{i(t-\frac{3}{2})\omega}\Big|_{-3}^{3}$$

$$=\frac{-2}{i(t-\frac{3}{2})}e^{i(t-\frac{3}{2})\omega}\Big|_{-3}^{3}=\frac{-2}{i(t-\frac{3}{2})}[e^{3i(t-\frac{3}{2})}-e^{-3i(t-\frac{3}{2})}]=\frac{-4}{i(t-\frac{3}{2})}\sin(3t-\frac{9}{2})$$

因此使得 $x(t)=0$ 之選項為(C)。

（B）18. 一個盒子中有 30 顆 IC，劣品比率為 1/6，在某次實驗中取了 10 顆 IC，試問此次實驗所用的 IC 都是良品的機率為何？

(A) $\frac{C_0^2C_{10}^{28}}{C_{10}^{30}}$ (B) $\frac{C_0^5C_{10}^{25}}{C_{10}^{30}}$ (C) $\frac{C_0^6C_{10}^{24}}{C_{10}^{30}}$ (D) $\frac{C_0^{10}C_{10}^{20}}{C_{10}^{30}}$

【解析】

劣品比率為 1/6，代表一個盒子中有 5 個劣品，因此 5 個劣品都不選及 25 個良品中選 10 個的機率便是答案(B)。

（D）19. 給定一個連續隨機變數 X，其機率密度函數為 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}},x>0\\0,elsewhere\end{cases}$，

試問一個隨機變數 $Y=3X-2$，則此隨機變數 Y 的變異數（variance）$\sigma_Y{}^2$ 為何?

(A) 18 (B) 36 (C) 64 (D) 144

【解析】

$$\sigma^2=\left\langle x^2\right\rangle-\left\langle x\right\rangle^2$$

$$\left\langle x^2\right\rangle=\int_0^{\infty}x^2\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=16\int_0^{\infty}(\frac{x}{4})^2e^{-\frac{x}{4}}d(\frac{x}{4})=16\Gamma(3)=32$$

$$\left\langle x\right\rangle=\int_0^{\infty}x\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}xe^{-\frac{x}{4}}dx=4\int_0^{\infty}\frac{x}{4}e^{-\frac{x}{4}}d(\frac{x}{4})=4\Gamma(2)=4$$

故 $\sigma_x{}^2=\left\langle x^2\right\rangle-\left\langle x\right\rangle^2=32-4^2=16$

又 $Y=3X-2$，可知 Y 的標準差為 X 的 3 倍，因此 Y 的變異數為 X 的 9 倍：

$\sigma_Y{}^2=16\times 9=144$，答案選(D)。

（B） 20. 設有一連續隨機變數 X 具有機率密度函數 $f(x)=\begin{cases}2x, 0\le x\le 1\\ 0, elsewhere\end{cases}$，求其期望值。

(A) 1　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{4}{5}$

【解析】

$\langle x\rangle=\int_0^1 x\cdot 2xdx=2\int_0^1 x^2dx=2[\frac{1}{3}x^3]\Big|_0^1=\frac{2}{3}$，答案選(B)。