

等 別：三等考試

類 科：電力工程

科 目：工程數學

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、試求下列微分方程式之通解。(15分)

$$\cos x \frac{d^2 y}{dx^2} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin x$$

二、令 M 定義為 $9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ ，求 $\iiint_M \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dV$ 。(10分)三、設某一函數為 $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ ， x_1 及 x_2 為二自變數，設取樣資料有四組：(10分)

| y | x_1 | x_2 |
|-----|-------|-------|
| 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| -1 | 2 | -1 |

試求 a_0 、 a_1 、 a_2 之值，使上列取樣資料與 $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ 有最小的平方誤差？四、隨機變數 X 、 Y 之結合機率 $P(X=x, Y=y)$ 為下表，試求：

| $P(X=x, Y=y)$ | | X | | |
|---------------|---|----------------|----------------|----------------|
| | | 0 | 1 | 2 |
| Y | 0 | $\frac{9}{24}$ | $\frac{6}{24}$ | $\frac{1}{24}$ |
| | 1 | $\frac{6}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ |

(一)期望值 (expected value) $E(X) = ?$ (5分)(二) $E(XY) = ?$ (5分)(三)協方差 (covariance) $\text{Cov}(X, Y) = ?$ (5分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：7341

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 下列何者為微分方程 $y'' + \frac{8y'}{x} + \frac{12y}{x^2} = x+1$ 之解？

(A) $c_1 x^{-2} + c_2 x^{-6} + \frac{1}{42} x^3 + \frac{1}{30} x^2$

(B) $c_1 x^{-2} + c_2 x^{-6} + \frac{1}{20} x + \frac{1}{12}$

(C) $c_1 x^{-3} + c_2 x^{-4} + \frac{1}{20} x + \frac{1}{12}$

(D) $c_1 x^{-3} + c_2 x^{-4} + \frac{1}{42} x^3 + \frac{1}{30} x^2$

2 求解微分方程 $y'' - 0.64y' = 0$ ，其解為：

(A) $y = c_1 e^{0.8x} + c_2 e^{-0.8x}$

(B) $y = c_1 + c_2 e^{0.64x}$

(C) $y = c_1 e^{0.8x} + c_2 x e^{0.8x}$

(D) $y = c_1 x + c_2 e^{0.64x}$

3 已知微分方程式 $y' - xy = 1$ ， $y(0) = 1$ 的解可表為 $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ ，試求常數 a_0 、 a_1 、 a_2 及 a_3 之值：

(A) $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1/2, a_3 = -1/4$

(B) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1/2, a_3 = 1/4$

(C) $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1/2, a_3 = -1/3$

(D) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1/2, a_3 = 1/3$

(請接背面)

等 別：三等考試
類 科：電力工程
科 目：工程數學

- 4 微分方程式 $-ydx + xdy = 0$ 乘上下列那一項，可以使該方程式變成正合 (exact) 微分方程式？
(A) $\frac{1}{x}$ (B) $\frac{1}{x^2}$ (C) $\frac{1}{y}$ (D) $\frac{1}{xy^2}$
- 5 下列何者為函數 $f(t) = \frac{1}{10}t \sin(5t)$ 之拉氏 (Laplace) 轉換？
(A) $\frac{5}{(s^2 + 25)^2}$ (B) $\frac{5s}{s^2 + 25}$ (C) $\frac{s}{(s^2 + 25)^2}$ (D) $\frac{s}{(s^2 + 10^2)^2}$
- 6 請問 $z=0$ 是複變函數 $f(z) = z \sin(z^2)$ 的幾階零點 (zero)？
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 7 下列選項何者為 $e^z = -2$ 的一解，其中 $i = \sqrt{-1}$ ：
(A) $-\ln(2) + i\pi$ (B) $\ln(2) + i\pi$ (C) $-\ln(2) + i2\pi$ (D) $\ln(2) + i2\pi$
- 8 假設路徑 C 為一逆時針方向的方形封閉路徑的邊界且其四個頂點分別為 $2+2i, -2+2i, -2-2i, 2-2i$ ，試求 $\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz$ 之值為何？
(A) 0 (B) 1 (C) πi (D) $2\pi i$
- 9 求 $\int_C 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy$ 其中積分曲線為 $C: x^2 + y^2 = 1$
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2
- 10 下列曲線 $\vec{r}(t)$ 中，何者與本身的切線方向垂直 (亦即 $\vec{r}(t) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = 0$)？
(A) $\vec{r}(t) = [t \quad \sin t \quad \cos t]$ (B) $\vec{r}(t) = [e^{-t} \quad t \quad e^t]$
(C) $\vec{r}(t) = [\sqrt{3} \cos t \quad 2 \sin t \quad -\cos t]$ (D) $\vec{r}(t) = [e^{-1} \cos 2t \quad e^{-t} \sin 2t \quad 1]$
- 11 級數 $\sum_{n=3}^{\infty} C_3^n z^n$ 之收斂半徑 R 為：
(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) ∞
- 12 若有一位置向量 (position vector) $\mathbf{F} = 3t\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ ，下列何者為其單位法線向量 (unit normal vector)？
(A) $\frac{(3\mathbf{i} + 2t\mathbf{k})}{\sqrt{9 + 4t^2}}$ (B) $\frac{(3\mathbf{i} - 2t\mathbf{k})}{\sqrt{9 + 4t^2}}$ (C) $\frac{(-2t\mathbf{i} + 3\mathbf{k})}{\sqrt{9 + 4t^2}}$ (D) $\frac{(2t\mathbf{i} + 3\mathbf{k})}{\sqrt{9 + 4t^2}}$
- 13 令矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ，矩陣 \mathbf{B} 滿足 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$ ，則 \mathbf{B} 的二個特徵值 (eigenvalue) 之和為何？
(A) 0 (B) $\sqrt{3}$ (C) 1 (D) 3
- 14 若 \mathbf{M} 是一個方陣 (square matrix)，且 $\mathbf{M}^6 = \mathbf{M}$ ，以下何者不可能是 \mathbf{M} 的特徵值 (eigenvalue)？其中 $i = \sqrt{-1}$ 。
(A) 0 (B) 1 (C) $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ (D) $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$
- 15 $\mathbf{A} = [1, 2], \mathbf{B} = [1, 2, 3]^T$ ，則下列運算何者有定義？
(A) \mathbf{AB}^T (B) $\mathbf{A}^T \mathbf{B}$ (C) $\mathbf{B}^T \mathbf{A}$ (D) \mathbf{BA}
- 16 若 \mathbf{A}, \mathbf{B} 為 2×2 之方陣，且 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{BA} = 2\mathbf{B} + 2\mathbf{I}$ ， \mathbf{I} 為 2×2 之單位矩陣，則 $\mathbf{B} = ?$
(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$
- 17 考慮一 3×3 的矩陣 \mathbf{M} ，若其行列式值 (determinant) 為 2，請問矩陣 $\left(\frac{\mathbf{M}}{2}\right)^{-4}$ 的行列式值為何？
(A) 1 (B) 8 (C) 64 (D) 256
- 18 十元錢幣 2 枚，其一擲出後人像向上之機率為 $\frac{1}{10}$ ，另一枚則為 $\frac{1}{2}$ ，若自此 2 枚錢幣隨機挑選一枚然後擲出 2 次，試求擲出 2 次皆為人像之機率：
(A) $\frac{13}{100}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{9}{100}$ (D) $\frac{3}{5}$
- 19 隨機變數 X 之機率密度函數 (probability density function) 為 $f_X(x) = Ae^{-3x} + e^{-2x}$ 且 $0 \leq x < \infty$ ，則常數 $A = ?$
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$
- 20 考慮一波式 (Poisson) 分布之離散隨機變數 (discrete random variable) X ，其值為 k 之機率是 $P\{X = k\} = e^{-3} \frac{3^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$ ，試求 $E\left\{\frac{1}{X+1}\right\} = ?$
(A) $\frac{1}{3}(1 - e^{-3})$ (B) $3(1 - e^{-3})$ (C) $\frac{1}{3}(1 - 3e^{-3})$ (D) $3(1 - \frac{e^{-3}}{3})$