98年特種考試地方政府公務人員考試試題

代號：33770 33870　　全一張（正面）

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　座號：________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、求當 $y(0)=3,\ y'(0)=-3,\ y''(0)=-47$ 時，$y'''+3y''+3y'+y=30e^{-x}$ 之解。（15 分）

二、設 $\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{b}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 滿足方程式 $\mathbf{Ax}_i=\mathbf{b}_i, 1\le i\le 3$。

㈠試求 $\mathbf{Ax}=\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix}$ 的解 $\mathbf{x}$。（7 分）㈡試問矩陣 $\mathbf{A}$ =？（8 分）

三、求下列級數，當 z 為何值時為收斂？當 z 為何值時為發散？（z 為複變數，$i=\sqrt{-1}$）

㈠ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{3^n}$（5 分）　㈡ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}$（5 分）

四、二維隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數（joint probability density function）為

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\\ 0, & otherwise\end{cases}$$ 。

㈠求 $Cov[X,Y]$，即 X 與 Y 的共變異值（covariance）為何？（3 分）X 與 Y 是否不相關聯（uncorrelated）？（2 分）

㈡ X 與 Y 是否獨立（independent）？（5 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　代號：7337

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 下列何者為微分方程式 $y^2dx+(3xy-4y^3)dy=0$ 之通解？其中 c 為任意實數。
(A) $y=2x^2/5+x+c/x$　(B) $y=x/5+c/x$　(C) $x=y/5+c/y$　(D) $x=4y^2/5+c/y^3$

2 若 $y_1=e^{px}\cos(qx)$ 是一齊次（homogeneous）微分方程式之一解，則此微分方程式可能是：
(A) $y''-2py'+q^2y=0$　(B) $y''-2pqy'+q^2y=0$　(C) $y''-2pqy'+(p^2+q^2)y=0$　(D) $y''-2py'+(p^2+q^2)y=0$

3 試求 $2xyy'=y^2-x^2$ 之解，其中 c 為任意實數。
(A) $x^2+y^2=c$　(B) $x/y+y/x=c$　(C) $y^2/x+x=c$　(D) $x^2/y+y=c$

4 有一個位置向量函數 $\vec{F}=\sin^2 x\vec{i}-y\sin 2x\vec{j}+5z\vec{k}$，計算 $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$ 之值，其中 S 為立體 $V=\{(x,y,z):|x|\le 1,|y|\le 1,|z|\le 1\}$ 的表面。
(A) 10　(B) 20　(C) 30　(D) 40

5 計算 $\oint_C[2x\cos(2y)dx-2x^2\sin(2y)dy]$ 之值，其中 C 表 xy 平面上任意一個簡單封閉的曲線。
(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

6 已知一個向量位置函數 $\vec{V}=xy\,\vec{i}+(y-z)^2\,\vec{j}+2xyz\,\vec{k}$，求 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{V})$ 之值為何？
(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0

7 下列何組之向量線性組合（linear combination）可構成矩陣 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\2&1&0&1\end{bmatrix}$ 的映零空間（null space）？
(A) $\{(2,-2,0,-2)^T\}$　(B) $\{(-1,1,0,1)^T,(-1,2,1,0)^T\}$　(C) $\{(-1,2,-1,0)^T,(-1,1,0,1)^T\}$　(D) $\{(-2,1)^T,(1,-1)^T\}$

（請接背面）

98年特種考試地方政府公務人員考試試題　代號：33770 33870　全一張（背面）

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學

8 若 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）爲 $F(s)=5/[s(s^2+s+2)]$，則 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ 爲：

(A) $5/4$　(B) $5/2$　(C) 0　(D) ∞

9 試求 $f(t)=te^{-3t}\sin 2t$ 之拉氏轉換（Laplace transform）$F(s)=$？

(A) $F(s)=4/[(s+3)^2+4]^2$　(B) $F(s)=4(s+3)/[(s+3)^2+4]$
(C) $F(s)=4(s+3)/(s^2+6s+13)^2$　(D) $F(s)=4/[(s+3)^2+4]$

10 令 $u(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$，則 $t(u(t)-u(t-1))$ 之拉氏轉換爲何？

(A) $\frac{1}{s^2}-\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-s}$　(B) $\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-s}\right)$　(C) $\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)$　(D) $\frac{1}{s^2}\left(1-e^{s}\right)$

11 下列敘述何者正確？

(A)如果矩陣 **B**、**C** 皆屬於 $R^{n\times n}$，並且對於所有 $\mathbf{x}\in R^n$，$\mathbf{Bx}=\mathbf{Cx}$ 皆成立，則 **B** 不一定要等於 **C**
(B)如果矩陣 **A** 屬於 $R^{n\times n}$，並且對於所有 $\mathbf{x}\in R^n$，$\mathbf{Ax}=0$ 皆成立，則 **A** 不一定等於零矩陣
(C)如果矩陣**A**爲對稱（symmetric）且非奇異（nonsigular），則$\mathbf{A}^{-1}$也是對稱矩陣
(D)一個線性系統如果方程式的個數小於變數的數目時，則此系統會有無窮多（infinite）解

12 定義函數 $f(t)$ 的傅利葉轉換（Fourier transform）爲 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$，其中 $i=\sqrt{-1}$。定義脈衝函數 $\delta(t)$ 如下：$t\ne 0$ 時 $\delta(t)=0$；同時 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$。求 $\delta(t)$ 的傅利葉轉換爲何？

(A) $\omega\delta(\omega)$　(B) $\delta(\omega)$　(C) $\frac{\delta(\omega)}{\omega}$　(D) 1

13 令 $p(x)$爲次數（degree）小於 n 的多項式（Polynomial）；$f(x)$，$x\in[0,1]$ 代表連續函數；L 表示從一個向量空間映至（mapping）另一個向量空間的運算子（operator）。下列何者不是線性轉換（linear transformation）？

(A) $L(p(x))=p(x)-xp(x)+x^3p'(x)$，$p'(x)\triangleq\frac{d(p(x))}{dx}$　(B) $L(f)=[f(0)+f(1)]/3$
(C) $L(p(x))=x+p(x)$　(D) $L(\mathbf{A})=\mathbf{C}^2\mathbf{A}$，$\mathbf{A}\in R^{n\times n}$，$\mathbf{C}\in R^{n\times n}$

14 定義函數 $f(t)$ 的傅利葉轉換（Fourier transform）爲 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$，其中 $i=\sqrt{-1}$。給定一個函數 $g(t)$ 定義如下：

$g(t)=\begin{cases}e^{-3t}, & t\ge 0\\ e^{3t}, & t<0\end{cases}$。求 $g(t)$ 的傅利葉轉換爲何？

(A) $\frac{18}{9+\omega^2}$　(B) $\frac{9}{9+\omega^2}$　(C) $\frac{6}{9+\omega^2}$　(D) $\frac{3}{9+\omega^2}$

15 $i=\sqrt{-1}$，有關數列（sequence）$\left\{\frac{e^{n\pi i/4}}{n}\right\}$敘述，下列何者正確？

(A)有界，收斂　(B)無界，發散　(C)有界，發散　(D)無界，收斂

16 假設 c 是個複數（complex number），也是常數（constant），並且函數 $f(z)$ 的導數 $\frac{d}{dz}f(z)\triangleq f'(z)$ 存在，則 $\frac{d}{dz}\left[c^{f(z)}\right]=$？

(A) $cf'(z)\log\left[f(z)\right]$　(B) $f'(z)c^{f(z)}$　(C) $f'(z)c^{f(z)}\log(c)$　(D) $c^{f(z)}f'(z)\log\left[f(z)\right]$

17 求解 $\oint_C \frac{-z-4-i3}{(z+i)(z-2)}dz$，其中 C 表示 $|z|=5$ 的圓（circle）且逆時鐘方向（counterclockwise）。

(A) $i\,4\pi$　(B) $-i\,2\pi$　(C) $i\,10\pi$　(D) 0

18 利用變換變數 $v=x,\ z=2x-y$ 可將偏微分方程式 $u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}=0$ 轉換爲：（其中 $u_{xx}\triangleq\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$）

(A) $u_{vv}=0$　(B) $u_{zz}=0$　(C) $u_{vz}=0$　(D) $u_{vv}+u_{zz}=0$

19 給定一個連續隨機變數 X，它的機率密度函數爲 $f(x)=\begin{cases}K(1-x^2), & -1<x<1\\ 0, & otherwise\end{cases}$，則 K 之值爲何？

(A) 0.65　(B) 0.70　(C) 0.75　(D) 0.80

20 下列那一個函數可以做爲一個隨機變數 X 的累積分佈函數（CDF, cumulative distribution function）？

(A) $F(x)=e^{-x^2},\ -\infty<x<\infty$　(B) $F(x)=(1-e^{-x^2})u(x)$，$u(x)$ 是單位步階函數(unit step function)
(C) $F(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}\tan^{-1}(x),\ -\infty<x<\infty$　(D) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<\infty$