97年特種考試地方政府公務人員考試試題

代號：33570 33670　全一張（正面）

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時

座號：______________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、求解 $\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\cdots+\sin[(2n-1)\theta]=$？（10分）

二、若 $f(x)=|x|$，$-1\le x\le 1$。

求㈠ $f(x)$定義於$[-1, 1]$的傅氏級數（Fourier series）（10分）

㈡ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$（5分）

三、試利用拉氏轉換（Laplace transform）方法求解 $x(t)=1+\int_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$。（10分）

四、求解 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=(1+\ln x)y^3$。（15分）

乙、測驗題部分：（50分）　　代號：**7335**

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 下列何者爲微分方程式$y^{(5)}-3y^{(4)}+3y'''-y''=0$的一般解？

(A) $y=a+bx+ce^x+dxe^x+hx^2e^x$
(B) $y=ax+bx^2+ce^x+dxe^x+hx^2e^x$
(C) $y=a+bx+cxe^x+dx^2e^x+hx^3e^x$
(D) $y=a+be^x+cxe^x+dx^2e^x+hx^3e^x$

2 下列何者不是恰當（exact）微分方程式？

(A) $(4x^3y^3-2xy)\,dx+(3x^4y^2-x^2)\,dy=0$
(B) $2x\,(ye^{x^2}-1)\,dx+e^{x^2}dy=0$
(C) $(3e^{3x}y-2x)\,dx+e^{3x}dy=0$
(D) $(2xy^4e^y+2xy^3+y)\,dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)\,dy=0$

3 一個溫度計現在顯示 5℃，把它放入一個 22℃的房間內，一分鐘後溫度計顯示爲 12℃，則需要多久後，溫度計顯示爲22℃左右？

(A) 9.68 mins　(B) 22.82 mins　(C) 17.64 mins　(D) 11.36 mins

4 下列何者爲$4xdy-ydx=x^2dy$之解？

(A) $(x-4)\,y=cx$　(B) $(x-4)\,y^2=cx$　(C) $(x-4)\,y^3=cx$　(D) $(x-4)\,y^4=cx$

5 純量函數$f(x, y, z)=xyz$在點P（$-1,1,3$）上，於向量$\vec{a}=[1,-2,2]$方向之方向導數（directional derivative）爲何？

(A) 11　(B) $\dfrac{11}{\sqrt{171}}$　(C) $\dfrac{7}{3}$　(D) $\dfrac{7}{\sqrt{19}}$

6 下列何者是純量場$\varphi(x, y, z)=x^2+2y^2+2yz$於位置（$1, 0,-1$）之最陡降（steepest descend）方向？

(A) $(-2, 0,-2)^T$　(B) $(-1, 1, 0)^T$　(C) $(2,-2, 0)^T$　(D) $(1, 0, 0)$

7 求$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$，其中$\vec{F}(x,y,z)=(z-2y)\vec{i}+(3x-4y)\vec{j}+(z+3y)\vec{k}$，$C$表在$z=2$平面上的單位圓。

(A) 2π　(B) 4π　(C) 5π　(D) 6π

8 下列線積分中，何者與積分路徑無關？

(A) $2xy^2dx+xydy+dz$
(B) $\sinh xz\,(zdx-xdz)$
(C) $ye^{2z}dy-ze^ydz$
(D) $-z\sin xzdx+\cos ydy-x\sin xzdz$

（請接背面）

9　假設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，則$e^{A}=$？

(A) $\begin{bmatrix}e-2 & 2e+2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}e & e^2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}e & 2e-2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}2e & 2e-2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

10　矩陣 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 5 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 的秩（rank）等於多少？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

11　令 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 為矩陣 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 之四個特徵值，則 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ 等於多少？

(A) 0　(B) 1　(C) 4　(D) 16

12　已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{bmatrix}$ 的特徵值多項式為 $P(\lambda)=-1+3\lambda-3\lambda^2+\lambda^3$，則 $P(A)=$？

(A) 1　(B) -1　(C) 3　(D) 0

13　若 $u(t)$ 表示單位步階函數（unit step function），則函數 $f(t)=2u(t)-2u(t-\pi)+u(t-2\pi)\sin t$ 的拉式轉換（Laplace transform）為何？

(A) $\dfrac{2}{s}-\dfrac{2}{s-\pi}+\dfrac{1}{(s-2\pi)^2+1}$　(B) $\dfrac{2}{s}-\dfrac{2}{s+\pi}+\dfrac{1}{(s+2\pi)^2+1}$

(C) $\dfrac{2}{s}-\dfrac{2e^{-\pi s}}{s}+\dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$　(D) $\dfrac{2}{s}-\dfrac{2e^{\pi s}}{s}+\dfrac{e^{2\pi s}}{s^2+1}$

14　設 A, B, P 皆為n階方陣，且 P 可逆。令 $B=P^{-1}AP$，則下列敘述何者錯誤？

(A) A 與 B 的特徵值皆相同　(B) A 與 B 的行列式相同　(C) A 與 B 的秩（rank）相同　(D) A 與 B 皆可對角化

15　試求函數 $F(s)=\ln\left(1+\dfrac{\omega^2}{s^2}\right)$ 的逆拉式轉換（inverse Laplace transform）。

(A) $\dfrac{2}{t}(1-\cos\omega t)$　(B) $\dfrac{2}{t}(1-\sin\omega t)$　(C) $\dfrac{2}{t}(1-\cosh\omega t)$　(D) $\dfrac{2}{t}(1-\sinh\omega t)$

16　有一個週期為 6 的函數 $f(x)$，其在 $x\in(1,7)$ 內之函數值為 $f(x)=\begin{cases}1 & ,1<x<4\\ -1 & ,4<x<7\end{cases}$，下列何者是該函數的傅立葉級數？

(A) $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi(x-1)}{3}$　(B) $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi(x-1)}{3}$

(C) $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\dfrac{-1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi(x-1)}{3}$　(D) $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\dfrac{-1}{n}\sin\dfrac{n\pi(x-1)}{3}$

17　級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2 3^n}(x-2)^n$ 的收斂半徑（radius of convergence）為何？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) ∞

18　有一振動方程式 $u_{tt}=c^2u_{xx}$，其中 $u_{tt}\triangleq\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，$u_{xx}\triangleq\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，若將其自變數 t, x 變換為 $v=x+ct$，$z=x-ct$，則可將原偏微分方程式轉換為：

(A) $u_{vv}=u_{zz}$　(B) $u_{vv}=u_z$　(C) $u_{zz}=u_v$　(D) $u_{vz}=0$

19　z 是一個複數（complex number），$z=x+iy$，x 與 y 皆為實數，則下列敘述何者正確？

(A) $0\le|\sin z|\le 1$　(B) $|\sin z|\le|\sin x|$　(C) $|\cosh z|\le\cosh x$　(D) $|\cosh z|\le|\sinh x|$

20　設 x 為連續隨機變數，其機率密度函數為 $f(x)=e^{-|x|}/2$，$-\infty<x<\infty$，求其Moment-generating function $E(e^{tx})$，$|t|<1$。

(A) $1-t^3$　(B) $1-t^2$　(C) $1-t$　(D) $1/(1-t^2)$