

等 別：三等考試
類 科：電力工程、電子工程
科 目：工程數學
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
- (二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
- (三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、請求下列微分方程式的解：

$$y'' + 4y = 1 + x + \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad (15 \text{ 分})$$

二、設 $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$ 。

- (一)求解 A 的特徵值 (eigenvalue) 與對應的特徵向量 (eigenvector)。(4 分)
- (二)求解 A^2 的特徵值與對應的特徵向量。(4 分)
- (三)解 $A^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ 。(7 分)

三、請利用留數 (residue) 計算 $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ 。(10 分)

四、設 X 與 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 是

$$f_{XY}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y < \infty \\ = 0, \quad x < 0 \text{ 或 } y < 0$$

其中 $\lambda > 0$ 。設 $Z = X + Y$ 。

- (一)求 Z 的期望值 (mean)。(5 分)
- (二)求 Z 的累積分布函數 (cumulative distribution function)。(5 分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：7344

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。

(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 考慮函數 $\phi(x, y, z) = 2x^2y - yz^2$ ，請決定梯度 $\nabla\phi(x, y, z)$ 在點 $(1, -1, 2)$ 之值為何？
 (A) $-4i + 2j + 8k$ (B) $-4i - 2j + 8k$ (C) $-4i - 2j - 8k$ (D) $-4i + 2j - 8k$
- 若 \cdot 為內積運算， \times 為外積運算，請計算 $(2i - j) \cdot [(i + 3j - k) \times (3i - k)]$ 之值為何？
 (A) -4 (B) -5 (C) -6 (D) -7
- 圍線積分 $\oint_c y^2 dx + (xy + x^2) dy$ 其中 c 為由直線 $y = x$ 與拋物線 $y = x^2$ 所圍成的封閉路徑，利用格林定理 (Green's theorem) 將此積分化成面積分 $\iint_R u(x, y) dx dy = K$ ，其中 R 為封閉路徑 c 所圍的區域，請問 $u(x, y)$ 與 K 分別為何？
 (A) $u(x, y) = y - 2x$ ， $K = \frac{1}{20}$ (B) $u(x, y) = 2x - y$ ， $K = \frac{1}{40}$
 (C) $u(x, y) = 2x - y$ ， $K = \frac{1}{20}$ (D) $u(x, y) = y - 2x$ ， $K = \frac{1}{40}$
- 下列那一個向量不在矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ 之列空間 (row space)？
 (A) $[3 \ 9 \ 14]$ (B) $[2 \ 2 \ 2]$ (C) $[6 \ 15 \ 24]$ (D) $[1 \ 2 \ 3]$
- 矩陣 $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ 經由對角化得 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，下列何者是 P 矩陣？
 (A) $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$
- 假設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ ，計算行列式值 $\det(3A^T) + \det(A^{-1}) = \frac{c}{3}$ ， $c = ?$
 (A) 18 (B) 28 (C) 244 (D) 234
- 假設 A 為 $n \times n$ 矩陣，下列那一個敘述不等效 (equivalent) 於其他敘述？
 (A) A 可被正交對角化 (orthogonally diagonalizable)
 (B) A 為對稱 (symmetric) 矩陣
 (C) 可為 A 找到或建構 n 個正交規範特徵向量 (orthonormal eigenvectors)
 (D) A 的行列式值 $\det A = \pm 1$
- 下列子集合何者為 R^3 的子空間 (subspace)？
 (A) $\{(a, b, a + 2b) \mid a, b \in R\}$ (B) $\{(0, a, a^2) \mid a \in R\}$
 (C) $\{(a + 1, a, 0) \mid a \in R\}$ (D) $\{(a, b, 1) \mid a, b \in R\}$
- 定義 $i = \sqrt{-1}$ ，複變數 $z = x + iy$ 與其共軛複數 $\bar{z} = x - iy$ 。下列何者在整個複數平面皆為可解析 (analytic)？
 (A) $f(z) = \bar{z}$ (B) $f(z) = e^y (\cos x + i \sin x)$
 (C) $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$ (D) $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$

- 10 定義 $i = \sqrt{-1}$ ，假設方程式 $z^2 - z + 1 + i = 0$ 的兩個解為 z_1 與 z_2 且 $|z_1| > |z_2|$ ，則下列何者正確？
 (A) $z_1 + z_2 = 1 + 2i$ (B) $z_1 - z_2 = 1 - 2i$ (C) $|z_1| = 1$ (D) $|z_2| = \sqrt{2}$
- 11 $f(z) = \frac{z(z-5)(z-i)}{(z+i)^3(z+1)(z-4)^2}$ ，且 c 為 $|z| = 3$ 逆時鐘轉之封閉路徑，請決定 $\oint_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ 之值為何？
 (A) $4\pi i$ (B) $-4\pi i$ (C) $6\pi i$ (D) $-6\pi i$
- 12 請利用複數積分決定 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ 之值為何？
 (A) $\frac{3\pi}{2}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{3\pi}{6}$ (D) $\frac{3\pi}{8}$
- 13 一階常微分方程式 $(Ax^2y^2 + By^3)dx + (2x^3y + 12xy^2 + 5)dy = 0$ 為正合 (exact)，A、B 值為何？
 (A) A = 2, B = 3 (B) A = 3, B = 3 (C) A = 3, B = 4 (D) A = 4, B = 3
- 14 給定微分方程 $(4 - y^2) \frac{dy}{dx} = x^2$ ，當初始值 $(x_0, y(x_0))$ 落在下列那一個 xy 平面區間時，該微分方程可能不會有唯一解 (unique solution)？
 (A) $x \in \mathbb{R}, -2 < y < 2$ (B) $x \in \mathbb{R}, y < -2$ (C) $x \in \mathbb{R}, y > -2$ (D) $x \in \mathbb{R}, -1 < y < 1$
- 15 已知週期為 6 的函數 $f(x) = |x|, -3 < x < 3$ ，展開成 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{3}$ ，下列何者正確？
 (A) $a_1 = \frac{6}{\pi^2}$ (B) $a_3 = \frac{2}{3\pi^2}$ (C) $a_5 = -\frac{8}{25\pi^2}$ (D) $a_7 = -\frac{12}{49\pi^2}$
- 16 函數 $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 之傅立葉轉換 (Fourier transform) 為下列何者？
 (A) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin w}{w}$ (B) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin w}{w}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos w}{w}$ (D) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos w}{w}$
- 17 下列那個函數 (t 為獨立變數) 無拉氏轉換 (Laplace transform)？
 (A) $\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ (C) $\frac{\sin t}{t}$ (D) $\frac{1}{t}$
- 18 假設 X 為一離散隨機變數 (discrete random variable)，其值為 -2、1 與 3 的機率分別為 $P(X = -2) = 0.4$ 、 $P(X = 1) = 0.5$ 與 $P(X = 3) = 0.1$ 。則期望值 $E[2X^2 + 1] = ?$
 (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8
- 19 某間製造公司專門生產發電機，在甲、乙、丙三地各有一間工廠，各工廠產量分別占總產量的 40%(甲)、25%(乙)、35%(丙)，各工廠生產產品的不合格率分別為 3%(甲)、2%(乙)、4%(丙)，則整間公司發電機產品的不合格率為？
 (A) 2.5% (B) 3.2% (C) 3% (D) 3.1%
- 20 設 X 、 Y 及 Z 為三個隨機變數，且聯合機率密度函數為 $f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y, z \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，請決定 $X \geq 3Y \geq 5Z$ 的機率為何？
 (A) $\frac{1}{40}$ (B) $\frac{3}{40}$ (C) $\frac{5}{40}$ (D) $\frac{7}{40}$