

等 別：三等考試
類 科：統計
科 目：抽樣方法
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、何謂抽樣誤差？那種樣本可以測量抽樣誤差？有那些方法可以降低抽樣誤差？(10 分)

二、(一)何謂簡單隨機樣本？(5 分)

(二)考慮簡單隨機抽樣，請證明任一母體元素 $u_i, i=1, \dots, N$ 被選入樣本的機率為 n/N 。(5 分)

(三)請問下列敘述是否正確？「若任一母體元素 $u_i, i=1, \dots, N$ 被選入樣本的機率皆相等，則此樣本稱為簡單隨機樣本」，若不正確，請舉一反例說明。(10 分)

三、(一)抽樣時，採分層隨機抽樣方法而不採用簡單隨機抽樣方法的原因有那些？(10 分)

(二)考慮分層隨機抽樣，證明在抽樣總成本固定之下，使樣本平均之變異數最小的各層樣本數最佳配置為 $n_i = n \frac{N_i \sigma_i / \sqrt{c_i}}{\sum_{k=1}^L N_k \sigma_k / \sqrt{c_k}}$ ，其中 N_i 是第 i 分層的大小， σ_i^2 是第 i 分層的變異數， c_i 是由第 i 分層獲得一觀察值的成本。(15 分)

(三)考慮分層隨機抽樣，請問在那一種樣本配置下，母體平均估計量與簡單隨機抽樣時的母體平均估計量相同，試證明之。(10 分)

四、考慮系統抽樣，請導出 $\rho = \frac{(k-1)nMSB - SST}{(n-1)SST}$ ，

$$MSB = \frac{n}{k-1} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

其中 $N=nk$ ， ρ 是系統樣本(集群)內任 2 元素的相關係數， $MSW = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$

$$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2$$

(10 分)

五、(一)考慮集群抽樣，若母體總數 M 已知，請問母體總和的估計量為何？若不知母體總數 M ，但知道集群總數 N 時，請問母體總和的估計量為何？(5分)

(二)考慮兩階段集群抽樣，證明母體平均估計量 $\mu = \frac{1}{M} \frac{\sum_{i=1}^n M_i \bar{y}_i}{n}$ 是母體平均 μ 的不偏估計量。其中 $\bar{M} = M/N$ 。提示： $E(\mu) = E_1 E_{2|1}(\mu)$ (10分)

(三)考慮兩階段集群抽樣，由相等大小集群 M 抽取相等大小樣本 m ，且當 N 很大時，證明在固定抽樣成本下，使 $V(\mu) = \frac{1}{n} (\sigma_b^2 + \frac{\sigma_w^2}{m})$ 值最小的 m

為 $m = \sqrt{\frac{\sigma_w^2 c_1}{\sigma_b^2 c_2}}$ ，其中 c_1 是第一階段每一觀察值的成本， c_2 是第二階段每一觀察值的成本， σ_b^2 是集群平均間的變異數， σ_w^2 是集群內元素間的變異數。(10分)