

代號：34070
34170
頁次：3-1

110 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試
類 科：電力工程、電子工程
科 目：工程數學
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
- (二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
- (三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、限定使用反矩陣法求解下列線性方程組。(10分)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

二、已知函數 $f(z) = \frac{-3z+5}{z(z^2-3z+2)}$ ，求圍線積分 $\oint_c f(z)dz$ ，其中 c 為 $|z| = \frac{3}{2}$ 之圓且路徑為逆時針方向。(10分)

三、假設函數 $f(x) = x + \pi$ ，且 $-\pi < x < \pi$ (週期為 2π)，試求傅立葉 (Fourier) 級數展開式並以此結果驗證下列等式成立。(15分)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

四、某工廠使用 A、B、C 三台機器製造產品，假設每台機器各自製造出 25%、35%、30% 的產品，而這三台機器製造出的產品瑕疵率分別為 5%、3%、4%。若取出一個產品經檢驗為瑕疵品，請問使用 A、B、C 三台機器製造此一瑕疵品的機率各是多少？(15分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：7340

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 1 若多項式 $p_1(x) = x^2 - 2x + 1$ ， $p_2(x) = 2x^2 + ax - 1$ ， $p_3(x) = x^2 + x + b$ 所拓展 (span) 的子空間維度為 3，則 (a, b) 為何？
- (A) $(2, \frac{1}{2})$ (B) $(-1, -2)$ (C) $(1, -\frac{4}{5})$ (D) $(0, -\frac{5}{4})$
- 2 某向量經過線性轉換 (linear transformation) $T = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ 之後，長度被放大 r 倍，逆時針旋轉角度 θ 。 r 和 θ 分別為何？
- (A) $r = \sqrt{3}, \theta = 60^\circ$ (B) $r = 1, \theta = -30^\circ$ (C) $r = 2, \theta = 60^\circ$ (D) $r = 2, \theta = -30^\circ$
- 3 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $\det(A^5)$ 為何？
- (A) 32 (B) 0 (C) -16 (D) -32
- 4 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，下列何者為其特徵向量 (eigenvector)？
- (A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 5 令 $z = x + iy$ ， i 為單位虛數，則 e^{z^2} 的虛部為何？
- (A) $e^{x^2-y^2} \sin(2xy)$ (B) $-e^{x^2-y^2} \sin(2xy)$ (C) $-e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$ (D) $e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$
- 6 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 3 & b \end{bmatrix}$ ，其特徵多項式 (characteristic polynomial) 為 $\lambda^3 + c\lambda^2 + 3\lambda - 2$ 。則 $4a + b + c$ 為何？
- (A) -16 (B) -7 (C) -2.5 (D) -2
- 7 微分方程式 $y' + \cos(x)y = 1$ ，初始值 $y(\pi) = A$ 。若 $y(x)$ 的級數解為 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \pi)^n$ ，則 a_3 為何？
- (A) 1 (B) $\frac{1}{6}$ (C) A (D) $\frac{1+A}{2}$
- 8 函數 $f(x) = e^{-2x}$ ， $-1 \leq x \leq 1$ ，其傅立葉級數 (Fourier series) 在 $x = -1$ 時收斂於 A ，在 $x = 0$ 時收斂於 B ，在 $x = 1$ 時收斂於 C 。則 $A + B + C$ 為何？
- (A) $e^2 - e^{-2} + 1$ (B) $\frac{e^2 - e^{-2}}{2} + 1$ (C) $\frac{e^2 + e^{-2}}{2}$ (D) $e^2 + e^{-2} + 1$

- 9 考慮定義於頂點為 $(0, 0)$ 、 $(3, 0)$ 、 $(2, 2)$ 的三角形的連續隨機變數 X 和 Y ，其機率密度函數 (probability density function) 為均勻分配 (uniform distribution)。機率 $P_r(X \leq 2, Y \leq 1)$ 為何？
 (A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{4}{5}$
- 10 連續隨機變數 X 和 Y 的結合機率密度函數 (joint probability density function) 為 $f_{XY}(x, y) = \begin{cases} A(x+y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ ，則 $0 \leq y \leq 3$ 區間內的邊際 (marginal) 機率密度函數 $f_Y(y)$ 為何？
 (A) $\frac{1}{12}(1+2y)$ (B) $\frac{1}{15}(2+2y)$ (C) $\frac{2}{21}(2+y)$ (D) $\frac{2}{39}(2+3y)$
- 11 矩陣 $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 8 \\ -1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 的秩 (rank) 為何？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 12 下列何者構成空間 \mathbf{R}^3 的基底？
 (A) $[1, 2, 0]$ 和 $[0, 1, -1]$ (B) $[1, 1, -1]$ ， $[2, 3, 4]$ ， $[4, 1, -1]$ 和 $[0, 1, -1]$
 (C) $[1, 2, 2]$ ， $[-1, 2, 1]$ 和 $[0, 8, 0]$ (D) $[1, 2, 2]$ ， $[-1, 2, 1]$ 和 $[0, 8, 6]$
- 13 已知一個 3×3 矩陣 B 的特徵值 (eigenvalues) 為 $0, 1, 2$ ，請問這些已知資訊尚不足以決定下列那個值？
 (A) B 的秩 (rank) (B) $B^T B$ 的特徵值 (C) $B^T B$ 的行列式值 (D) $(B+I)^{-1}$ 的特徵值
- 14 有一投影矩陣 $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ ，其中 A 為 $m \times n$ 矩陣，其秩為 n 。請問下列何者錯誤？
 (A) $P^T = P$ (B) $P^{-1} = P$ (C) $P^2 = P$ (D) $P^{123} = P$
- 15 下列何者是級數 $\sum_{n=0}^{\infty} 16^n (z+i)^{4n}$ 的收斂區域？
 (A) $|z+i| < \frac{1}{2}$ (B) $|z+i| < 1$ (C) $|z+i| < 2$ (D) $|z+i| < 4$
- 16 微分方程式 $y'' + 3y' + 2y = f(t)$ ，初始值 $y(0) = y'(0) = 0$ 。若 $y(t)$ 的拉式轉換 (Laplace transform) 為 $Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)(s-2)^2}$ ，則 $f(t)$ 為何？
 (A) te^{-2t} (B) $t^2 e^{-2t}$ (C) te^{2t} (D) $t^2 e^{2t}$
- 17 積分方程式 $y(t) + \int_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau = 1$ 的解為何？
 (A) $y(t) = \cos t$ (B) $y(t) = \sin t$ (C) $y(t) = \cos t + \sin t$ (D) $y(t) = e^t$
- 18 欲以積分因子 (integrating factor) 求解微分方程式 $-ydx + xdy = 0$ ，請問下列何者不為合適的積分因子，因其無法將方程式化為正合 (exact) 形式？
 (A) $1/x^2$ (B) $1/xy$ (C) $1/(x^2+y^2)$ (D) xy
- 19 一副撲克牌 52 張牌中包含 4 種花色 (黑桃、方塊、紅心、梅花)，每種花色 13 張牌。每抽一張牌後即將所抽的牌放回去洗牌重抽，請問這樣抽三次牌其中包含至少兩張黑桃的機率有多少？
 (A) $5/16$ (B) $27/64$ (C) $9/64$ (D) $5/32$
- 20 假設一輛公車到達一個車站的時間為均勻分布於區間 (t_1, t_2) ，而其平均值為 14:00，標準差為 $\sqrt{12}$ 分鐘。請問 (t_1, t_2) 的區間為何？
 (A) (13:54, 14:06) (B) (13:53, 14:07) (C) (13:52, 14:08) (D) (13:51, 14:09)