代號：33570
33670
頁次：4－1

107年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　　　　　　　　　　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）
㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、若 $A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \cos\theta & \sin\theta \\ c & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 為正交矩陣，求：
㈠ a, b, c 之值為何？（10分）
㈡ A 的特徵值之和為何？（5分）

二、解微分方程 $ty''+(t-1)y'+y=0$，其中 $y'=\dfrac{dy}{dt}$ 及 $y''=\dfrac{d^2y}{dt^2}$；求滿足下列條件之解 $y(0)=0$ 及 $y(1)=2$。（15分）

三、請求出週期函數 $f(x)=x^2$，其中 $-\pi<x<\pi, f(x+2\pi)=f(x)$，之傅立葉級數，再利用此級數求 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ 之值。（10分）

四、自一副正常52張撲克牌中取出5張牌，試求下列事件之機率：
㈠所有取出之牌皆為同花色（suit）。（5分）
㈡取出2張或更多之Aces。（5分）

乙、測驗題部分：（50分）　　　　　　　　　　　　　　代號：7335
㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1　下列那一組值會使矩陣 $M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ 為“歪斜對稱”（skew-symmetric）矩陣？
㈀ $a=1, b=2, c=3$　㈁ $a=1, b=-2, c=-3$　㈂ $a=-1, b=-2, c=-3$　㈃ $a=-1, b=2, c=-3$

2　微分方程式 $(2xy^3-3y)dx-(3x-3x^2y^2+6y)dy=0$ 其解為何？（選項中 k 為任意常數）
㈀ $x^2y^3+3xy+3x^2=k$　㈁ $x^2y^3-3xy+3y^2=k$　㈂ $x^2y^3-3xy-3y^2=k$　㈃ $x^2y^3+3xy-3x^2=k$

3 求矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -5 & 1\\ 1 & -4 & -7\end{bmatrix}$ 的秩（rank）為何？

(A)1　(B)2　(C)3　(D)0

4 令收斂區間為 $0<|z|<1$，試求複變數函數 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$ 以勞倫茲級數（Laurent series）表示時，其留數（residue）應為下列何值？

(A)0　(B)$\dfrac{1}{2}$　(C)1　(D)$\dfrac{1}{6}$

5 令矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -4 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，利用 QR 分解可得 $A=QR$，其中 Q 為一 3×2 正規正交行矩陣（orthonormal column matrix），$R=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}$ 為一 2×2 上三角矩陣（upper triangular matrix），且 a、b、c 均大於等於零，則下列敘述何者正確？

(A)$a+b+c=5$　(B)$abc=5$　(C)$a\text{-}b\text{-}c=4$　(D)$ab+bc+ca=4$

6 已知線性轉換 $T:\Re^4\rightarrow\Re^4$，且定義為 $T(\mathbf{x})=\mathbf{Ax},\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 6 & 0\\ 1 & 1 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3 & -3\\ -3 & 2 & -9 & -7\end{bmatrix}$。下列何者為 ker($T$)的基底（basis）？

(A){(-3, 0, 1, 0), (-1, 2, 0, 1)}　(B){(-3, 0, 1, 0), (-4, 2, 1, 1), (0, 1, 3, 1)}

(C){(2, 4, 1, 0), (-4, 2, 1, 1), (0, 1, 3, 1)}　(D){(2, 4, 1, 0), (0, 1, 3, 1)}

7 求複變函數積分 $\oint_C \dfrac{z+1}{z^3-2z^2}dz$ 之值，其中積分路徑 C 為複數平面上逆時鐘方向繞圓周 $|z-1|=2$，以及 $i=\sqrt{-1}$。

(A)$\dfrac{3\pi i}{2}$　(B)$-\dfrac{3\pi i}{2}$　(C)$3\pi i$　(D)0

8 下列何組向量可以是 R^3 的一個基底？

(A){[1 2 3], [4 5 6], [7 8 9]}　(B){[1 4 5], [2 7 3]}

(C){[1 2 3], [4 5 6], [7 8 9], [2 1 1]}　(D){[1 2 5], [4 1 6], [2 1 1]}

9　假設矩陣 A 為 3×3 的方陣，且其特徵值（eigenvalues）$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -1$，$\lambda_3 = -1$，求 $A^{50} =$？選項中 I 為 3×3 單位方陣。

(A) A　(B) $-A$　(C) I　(D) -I

10　假設 $z = 3+2i$，求 $I_m(\frac{\bar{z}}{z}) =$？

(A) $\frac{12}{13}$　(B) $-\frac{12}{13}$　(C) $-\frac{11}{13}$　(D) $-\frac{12}{15}$

11　求微分方程式 $xy' + y = \sin x$ 的解。（選項中 C 為任意常數）

(A) $y = \frac{(-\cos x + c)}{x}$　(B) $y = \frac{(-\tan x + c)}{x}$　(C) $y = -\cos x + c\sin x$　(D) $y = \frac{(-\cos x + c\sin x)}{x}$

12　下列何者是互為線性相依（linear dependent）？

(A) $y_1 = \cos wx,\quad y_2 = \sin wx,\quad y_3 = e^x$　(B) $y_1 = e^x,\quad y_2 = e^{2x},\quad y_3 = xe^x$

(C) $y_1 = e^{3x},\quad y_2 = e^{6x},\quad y_3 = e^{9x}$　(D) $y_1 = x,\quad y_2 = 3x,\quad y_3 = x^2$

13　設 $y = a(t)$ 為 $y''(t) + y'(t) + y(t) = 2$ 之解，則 $\lim_{t\to\infty} a(t)$ 之值為何？

(A) 0　(B) 2　(C) 4　(D) ∞

14　以 Frobenius 級數 $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^{n+r}$ 求解 $x^2y'' + x(\frac{1}{2} + 2x)y' + (x - \frac{1}{2})y = 0$，則其所得到的指示方程式（Indicial equation）為何？

(A) $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$　(B) $r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$　(C) $r^2 + \frac{1}{2}r - 1 = 0$　(D) $r^2 + 2r - \frac{1}{2} = 0$

15　已知 $f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$ 的拉普拉斯（Laplace）轉換為 $F(s) = \frac{s(1-e^{-2\pi s})}{s^2+4}$，當給定一微分方程為 $x''(t) + 4x(t) = f(t), x(0) = x'(0) = 0$，下列何者正確？

(A) $x(t) = \frac{1}{2}t\sin 2t \quad if\, t < 2\pi$　(B) $x(t) = \frac{1}{2}\sin 2t \quad if\, t \ge 2\pi$

(C) $x(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8}$　(D) $x(\frac{9}{4}\pi) = \frac{1}{2}\pi$

16 白努利方程式（Bernoulli equation） $y' + p(x)y + q(x)y^a = 0$ 可以何方式轉換為線性方程式？

(A)以變數變換 $w = y^{-a}$ 轉換

(B)以變數變換 $u = y^{1-a}$ 轉換

(C)以變數變換 $v = y^{a+1}$ 轉換

(D)要先知道一特解 $S(X)$後，以變數變換 $z = S(x) + \frac{1}{y}$ 轉換

17 下列何者為函數 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ 之傅立葉級數（Fourier series）？

(A) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n}\cos nx\right)$

(B) $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\cos nx\right)$

(C) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n}\sin nx\right)$

(D) $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx\right)$

18 給定一個連續隨機變數 X，其累積分布函數（cumulative distribution function）

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{x^2}{7} & \text{if } 0 \le x < 1 \\ \frac{2x}{7} - \frac{1}{7} & \text{if } 1 \le x < 3 \\ \frac{5x}{7} - \frac{x^2}{14} - \frac{11}{14} & \text{if } 3 \le x < 5 \\ 1.0 & \text{if } 5 \le x \end{cases}$$

，則機率 $P(X \le 1 \mid X \le 3)$ 之值為何？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

19 離散隨機變數 X 與 Y 之結合機率質量函數（joint probability mass function）為：

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot xy^2, & \text{if } x = 1,2,\ y = 1,2,3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

，試問下列何者正確？

(A) $E[X] = \frac{4}{3}$ (B) $E[X] = \frac{5}{3}$ (C) $E[X] = \frac{10}{7}$ (D) $E[X] = \frac{12}{7}$

20 投擲一個公正的骰子一次，規定出現點數 1，2，3，4 為成功（X=1），出現其餘點數則為失敗（X=0），求隨機變數 X 之變異數 Var(X)為何？

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{4}{9}$