

代號：33570  
頁次：4-1

# 106年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試

類 科：電力工程

科 目：工程數學

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、三維空間中的四點  $O$ 、 $A$ 、 $B$ 、 $C$  的座標分別為  $(2, 0, 2)$ 、 $(-3, 1, 0)$ 、 $(1, 1, 4)$ 、 $(5, 2, -4)$ ，  
求解：

(一)以  $O$ 、 $A$ 、 $B$  三點為頂點所構成的三角形面積。(5分)

(二)以  $O$ 、 $A$ 、 $B$ 、 $C$  四點為頂點所構成的四面體體積。(5分)

二、試求  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{(x+2)(x-10)(x^2+1)} dx$  之值。(15分)

三、求解偏微分方程式  $x^2 u_{xy} - 2y^2 u = 0$ ，其中  $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 。(10分)

四、連續隨機變數  $X$  與  $Y$  之聯合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2xe^{-y}, & \text{if } 0 < x < 1, y > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ 試求：}$$

(一) $X$  之邊際機率密度函數 (marginal probability density function)  $f_X(x)$  與  $Y$  之邊際  
機率密度函數  $f_Y(y)$ 。(7分)

(二) $XY$  的期望值  $E[XY]$ 。(8分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：7335

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 若  $A$  為一個  $6 \times 6$  反對稱矩陣 ( $A = -A^T$ )，下列何者錯誤？

(A)  $\det(A) = \det(A^T)$

(B)  $\det(A) = \det(-A)$

(C)  $\det(A) = -\det(A)$

(D)  $\det(A) = \det(-A^T)$

2 求  $\|u \times v\|^2 + (u \cdot v)^2$  與下列何者相等？

- (A)  $(u \cdot u)(v \times v)$                       (B)  $(u \times v)(u \cdot v)$                       (C)  $(u \cdot u)(v \cdot v)$                       (D)  $(u \times u) \cdot (v \times v)$

3 試決定  $a$  值，可能造成下列的聯立方程式會有無限多組解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_3 = 2 \\ (a^2 - 4)x_3 = a - 2 \end{cases}$$

- (A)  $a = -1$                       (B)  $a = -1.5$                       (C)  $a = -2$                       (D)  $a = -2.5$

4 令矩陣  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ，其反矩陣 (inverse matrix)  $A^{-1}$  可表示為  $[a_{ij}]$ ，則下列敘述何者正確？

- (A)  $a_{12} = -3$                       (B)  $a_{21} = -2$                       (C)  $a_{23} = -7$                       (D)  $a_{32} = 2$

5 已知  $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ ， $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ ，求  $f(A)$  為何？

- (A)  $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -20 & 11 \end{bmatrix}$                       (B)  $\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 7 & -20 \end{bmatrix}$                       (C)  $\begin{bmatrix} 11 & -7 \\ -20 & 4 \end{bmatrix}$                       (D)  $\begin{bmatrix} 20 & 7 \\ -4 & -11 \end{bmatrix}$

6 給定一  $3 \times 3$  矩陣  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，則下列何者錯誤？

- (A) 矩陣  $A$  的特徵值 (eigenvalues) 為 1, 2, 2  
(B)  $[0 \ 1 \ 0]^T$  為矩陣  $A$  的一個特徵向量 (eigenvector)  
(C)  $[-1 \ 0 \ 1]^T$  為矩陣  $A$  的一個特徵向量 (eigenvector)  
(D)  $[2 \ 1 \ 1]^T$  為矩陣  $A$  的一個特徵向量 (eigenvector)

7 假設複數  $z = x + iy$ ，則下列那一個複變數函數是屬於全域可分析的 (analytic for all  $z$ )？

- (A)  $xy + iy$                       (B)  $e^y e^{ix}$                       (C)  $e^{-y} \sin x - i e^{-y} \cos x$                       (D)  $2xy + i(x^2 - y^2)$

8 求  $\oint_C e^z dz$  之值，其中  $C$  為  $|z| = 3$  之逆時針之圓周：

- (A)  $\pi$                       (B) 0                      (C)  $-\pi$                       (D)  $-1$

9 已知複變數函數  $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$  的奇異點 (singular point) 是為一個極點 (pole)，試決定此極點的階數 (order)

$M$  及對應的留數 (residue)  $B$  分別為何？

- (A)  $M = 3$  ,  $B = \frac{e}{2}$       (B)  $M = 2$  ,  $B = \frac{-e}{2}$       (C)  $M = 2$  ,  $B = 2e^2$       (D)  $M = 1$  ,  $B = e^2$

10 求下列微分方程的特解：

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \text{ 且 } y(0) = 3, y'(0) = 4$$

- (A)  $y = (3 + 2x)e^{2x}$       (B)  $y = (2 + 3x)e^{2x}$   
(C)  $y = (3 - 2x)e^{\frac{3}{2}x}$       (D)  $y = (3 - 2x)e^{2x}$

11 求微分方程  $y' - \frac{4xy}{y-1} = 0$  ,  $y(0) = 1$  之解為：

- (A)  $2x - y - \ln|y| = -1$       (B)  $x^2 - y + \ln|y| = -1$   
(C)  $2x^2 - y + \ln|y| = -1$       (D)  $x^2 - y = -1$

12 已知  $y(t)$  的拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 方程式為  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{s+14}{s^4 + 3s^3 + 7s^2}$ 。下列何者錯誤？

(A)  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$

(B)  $y(0^+) = 7$

(C)  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\alpha) d\alpha\right\} = \frac{s+14}{s^5 + 3s^4 + 7s^3}$

(D)  $\mathcal{L}\{y(t-2)u(t-2)\} = e^{-2s} \frac{s+14}{s^4 + 3s^3 + 7s^2}$  , 其中  $u(t)$  為單位步階函數 (unit step function)

13 下列何者為  $xy(y')^2 + (x^2 + xy + y^2)y' + x(x+y) = 0$  之解？ (其中  $C$  為常數)。

- (A)  $x^2 + y^2 + C = 0$       (B)  $x^2 + y^2 + Cx = 0$       (C)  $x^2 + y^2 + Cy = 0$       (D)  $x^2 + y^2 + Cxy = 0$

14 給定一偏微分方程式  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$  , 且方程式滿足  $z(x,0) = x^2$  ,  $z(1,y) = \cos y$  , 試問  $z(0,\Pi) = ?$

- (A)  $\frac{12 - \Pi^2}{6}$       (B)  $-\frac{12 + \Pi^2}{6}$       (C)  $\frac{12 + \Pi^2}{6}$       (D)  $\frac{-12 + \Pi^2}{6}$

15 有一微分方程  $(x^2 + 16)y'' + \frac{1}{3}x^2y' + 5e^x y = 0$ ， $r_1$  及  $r_2$  分別為其級數解  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  及  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-3)^n$  的收斂

半徑，其中  $c_n$  為常數，則  $r_1 + r_2 = ?$

- (A)6 (B)7 (C)8 (D)9

16 求  $t \cos(at)$  之拉普拉斯轉換 (Laplace transform) :

- (A)  $\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$  (B)  $\frac{2s^2}{(s^2 + a^2)^2}$  (C)  $\frac{2(s+a)}{(s^2 + a^2)^2}$  (D)  $\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

17 試問下列何者不滿足二維拉普拉斯方程式  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  ?

- (A)  $u = x^3 - 3xy^2$  (B)  $u = x/(x^2 + y^2)$   
(C)  $u = x/y - y/x$  (D)  $u = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$

18 某離散隨機變數  $X$  之質量函數為  $P(-2) = P(1) = P(2) = 0.15$ ， $P(3) = 0.55$ ，試問期望值  $E[X]$  為何？

- (A)0.6 (B)1 (C)1.5 (D)1.8

19 設隨機變數 (random variable)  $X$  和  $Y$  的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a(x+y)^2, & -2 < x < 2 \text{ and } -3 < y < 3 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \text{。則 } a \text{ 之值為何？}$$

- (A)1/104 (B)1/36 (C)1/24 (D)1/6

20 令  $X_i$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，為獨立高斯隨機變數 (Gaussian random variables)，其  $E[X_i] = \mu_i$ ， $Var[X_i] = \sigma_i^2$ ，亦

即  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ，下列何者錯誤？

- (A)  $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \sim N\left(0, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$   
(B)  $\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$   
(C)  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i, \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$   
(D)  $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$