

等 別：三等考試
類 科：工業工程
科 目：工程統計學與品質管制
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、令 X 為某電子零件的厚度，最理想的厚度值是 θ (單位：mm)。現在給定一組所謂 iid 資料， X_1, X_2, \dots, X_n 。令 μ_X 為 X 之期望值， σ_X^2 為 X 之變異數。我們想要估計 μ_X 與 σ_X^2 。我們以不偏 (unbiased) 或小的 mean squared error (mse) 為選取估計量的標準。

令 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ 為 μ_X 之估計量。令 $se(\bar{X}) = \sqrt{\text{var}(\bar{X})}$ 為 \bar{X} 之標準誤。

再令 3 個 σ_X^2 之估計量定義如下：

$$\cdot \hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = S^2$$

$$\cdot \hat{\sigma}_2^2 = \frac{(n-1)S^2}{n}$$

$$\cdot \hat{\sigma}_3^2 = \frac{(n-1)S^2}{n+1}$$

回答以下問題並說明理由：(每小題 5 分，共 30 分)

(一) \bar{X} 是否為 μ_X 的不偏估計量？

(二) 令 μ_X 之 95% 信賴區間為 $(\bar{X} - z_{\alpha/2} se(\bar{X}), \bar{X} + z_{\alpha/2} se(\bar{X}))$ 。

寫出 $z_{\alpha/2}$ 之值。(參考附表：標準常態分配表)

(三) 上一小題使用了中央極限定理，本小題是考你中央極限定理的定義。中央極限定理是當 n 無限大時，_____ 的分配趨近標準常態。(請將應填在空白處的答案作答於試卷上)

(四) $\hat{\sigma}_1^2$ 是否為 σ_X^2 的不偏估計量？

(五) 3 個 σ_X^2 之估計量中何者 mse 最小？

(六) 如果 X 服從常態分配且 μ_X 未知，則 σ_X^2 的最大概似估計量 (maximum likelihood estimator, MLE) 為何？

(請接第二頁)

等 別：三等考試
類 科：工業工程
科 目：工程統計學與品質管制

二、考慮一個 2^k 全因子實驗，其中 $k=3$ ，各有 2 個水準。回答下列問題，並說明理由：
(每小題 5 分，共 20 分)

(一)繪一立方圖，將符號：(1), a, b, c, ab, ac, bc, abc 填在立方圖之適當位置。

(二)將符號：(1), a, b, c, ab, ac, bc, abc 填在表 1 中之第三行 (Treatment Combination) 之適當位置，並將符號+、-填滿第四到第十行之適當位置。(請將表 1 繪製於試卷上作答)(表 1 中之第一行是做實驗時實際上使用的次序，第二行是實驗設計中所謂的標準次序。)

(三)說明如何估計主效用 A。

(四)因為經費受限，無法做 2^3 全因子實驗，只能做 4 次實驗。假設可犧牲 ABC 交互作用，要如何選擇此 4 次實驗？

表 1： 2^3 全因子實驗

Run Order	Stand. Order	Treat. Combi.	Factorial Effect						
			A	B	C	AB	AC	BC	ABC
4	1								
2	2								
8	3								
1	4								
6	5								
5	6								
7	7								
2	8								

註：Run order：做實驗時實際上使用的次序

Standard order：實驗設計中所謂的標準次序

三、令 X 為某電子零件的厚度。現在給定一組所謂常態 iid 資料， X_1, X_2, \dots, X_n 。令 μ_X 為 X 之期望值， σ_X^2 為 X 之變異數， $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ 為 μ_X 之估計量， $\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X})$ ， $se(\bar{X}) = \sqrt{\text{var}(\bar{X})}$ 為 \bar{X} 之標準誤。

如果使用 Shewhart Chart \bar{X} 品管圖：上下限分別為 $\mu_{\bar{X}} + k se(\bar{X})$ 與 $\mu_{\bar{X}} - k se(\bar{X})$ ，其中，當製程正常時 $\mu_X = \mu_0$ ， $\sigma_X = 1$ 。將正確 average run length (ARL) 填入表 2 之空格(a), (b), (c), (d)，並列出計算式。(a), (b), (c), (d)之答案請作答於試卷上)其中， $\mu_X = \mu_0 + \delta\sigma_X$ ， $\sigma_X = 1$ ，查附表：標準常態分配表。(每一答案 5 分，共 20 分)

表 2：ARL Values.

δ	$k=2$	$k=3$
0	(a)	(b)
1	(c)	(d)

(請接第三頁)

等 別：三等考試
類 科：工業工程
科 目：工程統計學與品質管制

四、表 3 第三、四行列出太陽系九大行星之公轉週期 x (定義為：行星繞太陽的週期，單位：天) 與軌道的平均半徑 y (定義為：行星繞太陽的橢圓長軸半長，單位： 10^9 cm)。使用線性迴歸算出 x 與 y 的關係： $\hat{y}_i = 340 + 0.0655x_i, i = 1, 2, \dots, 9$ 。表 3 最右一行是迴歸值與真實值的誤差 ($e_i = y_i - \hat{y}_i, i = 1, 2, \dots, 9$)。表 4 為迴歸之相關 ANOVA 表，圖 1 提供與誤差相關的資料。

表 3：x, y, and e

i	行星	x_i	y_i	e_i
1	水	88	58	-287.764
2	金	225	108	-246.738
3	地	365	150	-213.908
4	火	687	228	-156.998
5	木	4339	778	153.795
6	土	10761	1427	382.155
7	天王	30690	2875	524.805
8	海王	60185	4505	222.882
9	冥王	90782	5914	-372.221

表 4：ANOVA 表

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	1	36822205	MS_R	304.16	0.000
Residual Error	7	847428	MS_E		
Total	8	37669632			

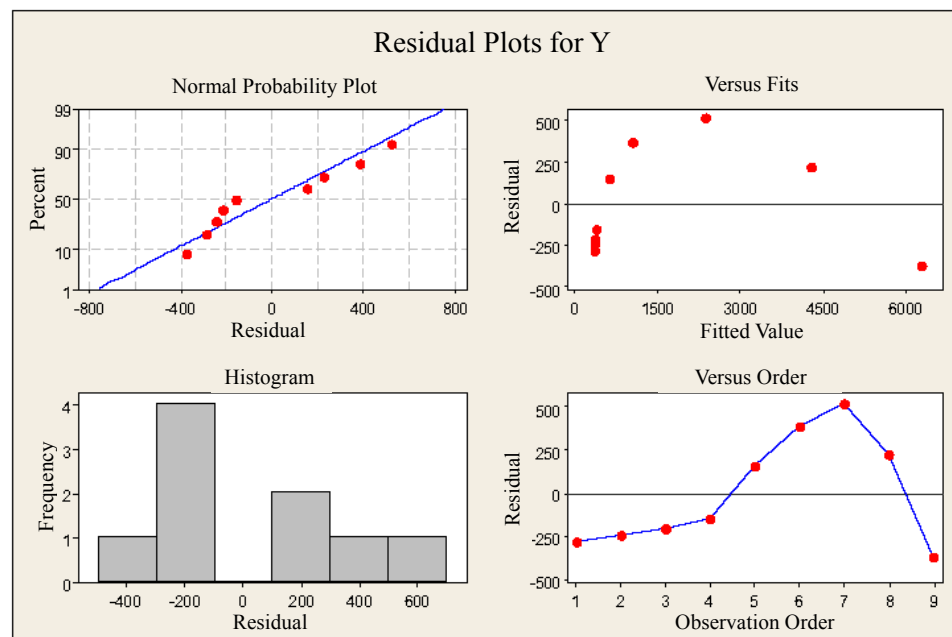


圖 1：Plots about e_i

根據以上太陽系九大行星相關的圖與表中之資料，回答下列問題，並說明理由：
(每小題 5 分，共 30 分)

- (一) 判斷此迴歸式 $\hat{y} = 340 + 0.0655x$ 是否適合描述 x 與 y 的關係？
- (二) 列出迴歸式 Coefficient of Determination, R^2 之值。
- (三) 列出 MS_R 與 MS_E 之值 (表 4 第四行)。
- (四) 列出 ANOVA 表中虛無與對立假設。
- (五) 根據 ANOVA 表中最後兩列的值(F and P)，針對上小題之虛無與對立假設作出結論。
- (六) 此迴歸式的誤差值是否為獨立？

(請接第四頁)

