100 年特種考試地方政府公務人員考試試題　　代號：33970｜34170　全一張（正面）

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程、電信工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　座號：______________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、求解微分方程式 $(2x-4y+1)y'+x-2y=0$，其中 $y'=\dfrac{dy}{dx}$。（15 分）

二、請找出複數平面上函數 $f(z)=-z\,\mathrm{Im}(z^2)$ 可以微分的全部點，並證明之，其中 $\mathrm{Im}(z^2)$ 為 z^2 的虛部。（10 分）

三、已知 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ 和一矩陣集合 $\boldsymbol{S}=\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right\}$，

㈠證明 $\boldsymbol{S}$ 內之 4 個矩陣為線性獨立。（5 分）
㈡把 A 表示成 $\boldsymbol{S}$ 內之 4 個矩陣的線性組合。（10 分）

四、請找出表面方程式 $\mathbf{S}: x^4+y^4+z^4=18$ 在點 $\mathrm{p}=(2,-1,1)$ 的單位法向量（unit normal vector）及切面（tangent plane）方程式。（10 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　**代號：7339**

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 考慮 $x>0$。設 y_1 及 y_2 爲 $x^2y''+2xy'+(x+2)y=0$ 的解。又知 $y_1(1)=0$、$y_1'(1)=1$、$y_2(1)=2$ 及 $y_2'(1)=e^2$。下列何者爲 y_1 及 y_2 的 Wronskian？
(A) $\dfrac{2}{x^2}$　(B) $-\dfrac{2}{x^2}$　(C) $2x^2$　(D) $-2x^2$

2 下列何者不是白努利（Bernoulli）方程式？
(A) $y'+2xy=xy^2$　(B) $y'+2x^2y=xy^3$　(C) $y'+2y=y^2$　(D) $y'+2xy^2=xy^3$

3 若 $\left[x\cos(x+y)+g(x,y)\right]dx+x\cos(x+y)dy=0$ 是正合（exact）微分方程式，則 $g(x,y)$ 可爲何？
(A) $\cos(x+y)$　(B) $x\sin(x+y)$　(C) $1+x\cos(x+y)$　(D) $x+\sin(x+y)$

4 若 $F(s)$ 爲 $f(t)$ 之拉普拉斯（Laplace）轉換，$F(s)=\dfrac{1}{s^2(s-a)}$ 則 $f(t)$ 爲何？
(A) te^{at}　(B) te^{-at}　(C) $\dfrac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)$　(D) $\dfrac{1}{a^2}(e^{at}+at+1)$

5 求解微分方程 $y'=y\tan x,\ y(0)=\dfrac{\pi}{3}$，其解爲何？
(A) $y=\dfrac{\pi}{3}\sec x$　(B) $y=\dfrac{3\pi}{2}\sec x$　(C) $y=\dfrac{\pi}{3}\cos x$　(D) $y=\dfrac{\pi}{3}\tan x$

6 請找出何者爲曲線 $y=\dfrac{c}{x^2}$ 的正交曲線？
(A) $x^2+2y^2=k$　(B) $x^2-2y^2=k$　(C) $x^2-2y^2+x=k$　(D) $x^2-2y^2-x=k$

7 有一個線性轉換 $T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+3x_2+x_3,3x_1+3x_2+x_3,2x_1+4x_2+x_3)$，下面那一項是 $T^{-1}(x_1,x_2,x_3)$？
(A) $(x_1+x_2,x_1+x_3,6x_1+2x_2-3x_3)$　(B) $(-x_1+x_2,-x_1+x_3,6x_1+2x_2-3x_3)$
(C) $(x_1+x_2,x_1+x_3,6x_1-2x_2-3x_3)$　(D) $(-x_1+x_2,-x_1+x_3,6x_1-2x_2-3x_3)$

（請接背面）

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程、電信工程
科　　目：工程數學

8 向量 $w=[5\quad -5\quad 2]$ 以 $B=\{[\frac{3}{5}\quad \frac{4}{5}\quad 0],[\frac{-4}{5}\quad \frac{3}{5}\quad 0],[0\quad 0\quad 1]\}$ 當作基底的三維座標為：

(A) $\begin{bmatrix}-1\\-7\\2\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1\\-7\\2\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1\\7\\-2\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}-1\\-7\\-2\end{bmatrix}$

9 若 A 為對稱矩陣，下列敘述何者錯誤？

(A) $A=A^T$　(B) A 可對角化
(C) A 的所有特徵值均為實數　(D)若 A 之特性方程式有重根時，A 不一定可對角化

10 若 0 為矩陣 $\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&\alpha&1\\0&1&2\end{bmatrix}$ 的特徵值，請問 α 為何值？

(A) 1　(B) $\frac{3}{2}$　(C) 2　(D) $\frac{5}{2}$

11 兩連續隨機變數 X、Y 之結合機率密度函數（joint probability density function）為 $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，則協方差（covariance）$\mathrm{Cov}(X,Y)=$ ？

(A) $-\frac{1}{36}$　(B) $-\frac{3}{28}$　(C) $-\frac{5}{24}$　(D) $-\frac{1}{39}$

12 考慮一波式（Poisson）分布之離散隨機變數（discrete random variable）X，其值為 k 之機率是 $P\{X=k\}=e^{-3}\frac{3^k}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$，試求其均值（mean）$E\{X\}=$ ？

(A) 3　(B) 6　(C) 9　(D) 12

13 一公正的骰子被擲 10 次，若點數 2 出現 3 次之機率為 $(\frac{10!}{a!b!})(\frac{c^d}{6^{10}})$，則 $a+b+c+d=$ ？

(A) 15　(B) 20　(C) 21　(D) 22

14 求 $\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=$ ？

(A) $\frac{1}{2}$　(B) 1　(C) 2　(D) 4

15 請計算 $(1+\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$ 之值，其中 $i=\sqrt{-1}$。

(A) $\sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}$　(B) $\sqrt{\frac{3}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}$　(C) $\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{3}{2}}$　(D) $\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{3}{2}}$

16 令 $f(z)=|z|^2$ 為一複數函數，則下列的敘述何者錯誤？

(A) $f(z)$ 是一連續函數　(B) $f(z)$ 在 $z=0$ 可微分　(C) $f(z)$ 在 $z=0$ 可解析　(D) $f(z)$ 在 $z=1$ 不可微分

17 假設路徑 C 為一逆時針方向的單位圓 $|z|=1$，試求 $\int_C z^2\sin(\frac{1}{z})dz$ 之值為何？

(A) 0　(B) πi　(C) $\frac{-\pi i}{3}$　(D) $\frac{\pi i}{2}$

18 向量場 $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+(zx-\sin(y))\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$ 在點 $p=(-1,0,1)$ 的旋度（curl）為何？

(A) $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$　(B) $2\mathbf{i}+2\mathbf{k}$　(C) $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$　(D) $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$

19 有一曲線之參數方程式為 $x=10\sin t$，$y=10\cos t$，其中 $\frac{-\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$，請問該曲線弧長為何？

(A) 5π　(B) 10π　(C) 15π　(D) 20π

20 有三個向量 $\vec{a}=[-1,2,0]$，$\vec{b}=[2,3,1]$，$\vec{c}=[5,-7,2]$，求 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=$ ？

(A) 11　(B) -11　(C) 10　(D) -10