

99 年公務人員特種考試外交領事人員及國際新聞人員考試、
99 年公務人員特種考試國際經濟商務人員考試、99 年公務
人員特種考試法務部調查局調查人員考試及 99 年公務
人員特種考試國家安全局國家安全情報人員考試試題

考試別：國家安全情報人員

等 別：三等考試

類科組：電子組

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，請以藍、黑色鋼筆或原子筆將試題題號及答案在申論試卷上由左至右橫式作答。

(二)於本試題上作答者，不予計分。

一、有一個矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，請分別寫出此矩陣的：(一)行空間 (column space)

(二)列空間 (row space) (三)零空間 (null space)。(15 分)

二、求解 $y(t) = \cos t + e^{-2t} \int_0^t y(\alpha) e^{2\alpha} d\alpha$ 。(10 分)

三、請利用留數 (residue) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)} dx$ 之值。(10 分)

四、二維連續隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function)

為 $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{18\pi} \exp\left(\frac{-x^2 - y^2 + 4x - 4y - 8}{18}\right)$ ， $-\infty < x < \infty$ ， $-\infty < y < \infty$ 。定義隨

機變數 W 為 $W = 3X - 2Y$ 。

(一)求 X 與 Y 的邊際機率密度函數 (marginal probability density function) $f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$ 。(10 分)

(二)求 W 的期望值 (Expected value)。(5 分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：6509

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 1 下列何者可為 $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ 之解？
- (A) $y = e^{4x}$ (B) $y = e^{-2x}$ (C) $y = e^{3x}$ (D) $y = e^{-x}$
- 2 $y(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) 為 $Y(s) = \frac{3(1 - e^{-2\pi s})}{(s^2 + 9)}$ ，其中 $u(t)$ 為單位步階 (unit step) 函數，則 $y(t) = ?$
- (A) $y(t) = (1 - u(t - 2\pi))\sin 3t$ (B) $y(t) = 3(1 - u(t - 2\pi))\cos 3t$
- (C) $y(t) = 3\cos 3(t - 2\pi)$ (D) $y(t) = u(t - 2\pi)\sin 3t$
- 3 下列何者可為微分方程式 $y' = e^{-2x}$ 之解？
- (A) $y = \frac{e^{-2x}}{2} + c$ (B) $y = \frac{-e^{-2x}}{2} + c$ (C) $y = -2e^{-2x} + c$ (D) $y = 2e^{-2x} + c$
- 4 下列何者可為微分方程式 $y' = \frac{4x^2 + y^2}{xy}$ 之解？
- (A) $y^2 = x^2(\ln|x| + c)$ (B) $y^2 = x^2(8\ln|x| + c)$ (C) $y^2 = x(8\ln|x| + c)$ (D) $y = x^2(8\ln|x| + c)$
- 5 下列何者錯誤？
- (A) $y'' + 4y' + 3y = 0$ 是線性微分方程式
- (B) $y' + 2x^3y = xy$ 是白努利 (Bernoulli) 方程式
- (C) $2\sin(y^2)dx + xy\cos(y^2)dy = 0$ 是正合微分 (exact differential) 方程式
- (D) $x^2y'' + xy' + 2y = 0$ ，其中 $x > 0$ ，是尤拉柯西 (Euler-Cauchy) 方程式
- 6 試求函數 $f(t) = t \sin 2t$ 之拉氏轉換 (Laplace transform)：
- (A) $\frac{-4s}{(s^2 + 4)^2}$ (B) $\frac{4s}{(s^2 + 4)^2}$ (C) $\frac{-2s}{(s^2 + 4)^2}$ (D) $\frac{2s}{(s^2 + 4)^2}$
- 7 下列選項何者為 $e^z = 2i$ 的一解，其中 $i = \sqrt{-1}$ ：
- (A) $i \ln(2)$ (B) $\ln(2) + i(3/2)\pi$ (C) $\ln(2) + i(5/2)\pi$ (D) $\ln(2) + i(7/2)\pi$
- 8 複變函數 $f(z) = \frac{2i}{1 + iz}$ 對 $2i$ 展開的泰勒級數 (Taylor series) 為何？其中 $i = \sqrt{-1}$ 。
- (A) $\sum_{n=0}^{\infty} 2i^{n+1}(z - 2i)^n$ (B) $\sum_{n=0}^{\infty} 2i^{n-1}(z - 2i)^n$ (C) $\sum_{n=0}^{\infty} 2i^n(z - 2i)^n$ (D) $\sum_{n=0}^{\infty} i^n(z - 2i)^n$

9 已知 $\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ ，下列函數 $\phi(x, y, z)$ 何者滿足 $\vec{F} = -\nabla\phi$ ？

(A) $\phi(x, y, z) = \frac{-(x^2 + y^2 + z^2)^n}{2n}$

(B) $\phi(x, y, z) = \frac{-(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}}{2n}$

(C) $\phi(x, y, z) = \frac{-(x^2 + y^2 + z^2)^n}{2(n+1)}$

(D) $\phi(x, y, z) = \frac{-(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}}{2(n+1)}$

10 給定曲線 $4x^2 + y^2 = 4$ ， $z = -\sqrt{3}x$ ，則點 $P(1, 0, -\sqrt{3})$ 至點 $Q(-1, 0, \sqrt{3})$ 之總長度為何？

(A) π

(B) 2π

(C) 3π

(D) 4π

11 令向量 $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ， $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，則行列式值 $|uv^T|$ 為何？

(A) -6

(B) 0

(C) 2

(D) 10

12 下列何者為聯立方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$ 之最小平方解 (Least squares solution)？

(A) $\begin{bmatrix} 82 \\ 50 \\ 71 \\ 50 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 75 \\ 50 \\ 71 \\ 50 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 83 \\ 50 \\ 71 \\ 50 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 71 \\ 50 \\ 83 \\ 50 \end{bmatrix}$

13 設 $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ ，則行列式 $|A^{-1}| = ?$

(A) $\frac{1}{23}$

(B) $\frac{1}{46}$

(C) 46

(D) 23

14 設 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ，則 A 的簡化列梯形式 (reduced row echelon form) 為何？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- 15 設 $v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是 \mathbf{R}^3 中的向量，試問下列那一個向量可以表示為 v_1, v_2, v_3 的線性

組合 (linear combination) ?

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

- 16 試計算 $z^i = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ 的主值 (principal value, $-\pi < \theta < \pi$)，其中 $z = re^{i\theta}$ 。則下列何者正確？

(A) $v(r, \theta) = e^{-\theta} \cos(\ln r)$

(B) $u(r, \theta) = e^{-\theta} \cos(\ln r)$

(C) $u(r, \theta) = -e^{-\theta} \sin(\ln r)$

(D) $v(r, \theta) = -e^{-\theta} \sin(\ln r)$

- 17 若 ∇ 為 gradient, f 為一純量函數，下列何者為圓柱體座標系 (r, θ, z) 上之 ∇f ?

(A) $\nabla f = (\partial f / \partial r)\mathbf{r} + (\partial f / \partial \theta)\boldsymbol{\theta} + (\partial f / \partial z)\mathbf{z}$

(B) $\nabla f = (\partial f / \partial r)\mathbf{r} + r(\partial f / \partial \theta)\boldsymbol{\theta} + z(\partial f / \partial z)\mathbf{z}$

(C) $\nabla f = (\partial f / \partial r)\mathbf{r} + r(\partial f / \partial \theta)\boldsymbol{\theta} + (1/z)(\partial f / \partial z)\mathbf{z}$

(D) $\nabla f = (\partial f / \partial r)\mathbf{r} + (1/r)(\partial f / \partial \theta)\boldsymbol{\theta} + (\partial f / \partial z)\mathbf{z}$

- 18 令 X 與 Y 為均勻分布 (uniform distribution) 於 $[0, 1]$ 之二獨立 (independent) 連續隨機變數 (continuous random variable)，試求機率 $P(Y^2 > 3X^2) = ?$

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

(C) $3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

- 19 欲從一 52 張之標準撲克牌中抽出 5 張牌，試求 5 張牌皆為同一種花色 (suit) 之機率，若該機率為 $\frac{\binom{a}{b}\binom{c}{d}}{\binom{52}{e}}$ ，

其中 $\binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$ ，試求 $a+b+c+d+e = ?$

(A) 58

(B) 57

(C) 28

(D) 19

- 20 一離散隨機變數 (discrete random variable) X 均勻 (uniformly) 分布於 $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ，令 Y 為事件 $X \leq 5$ 之指標 (indicator) 隨機變數，令 Z 為 X 之奇數事件之指標 (indicator) 隨機變數，試求 $E(Y) + E(Z) = ?$

(A) 0.6

(B) 1

(C) 1.2

(D) 1.5