

考試別：國家安全情報人員
等別：三等考試
組別：電子組（外國文選試英文）
科目：工程數學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、設 $y(t) = 2t + \int_0^t y(t-\tau) \sin \tau d\tau$ ，求 $y(t)$ 。（10分）

二、某圓盤狀的剛體（rigid body）： $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, z = 2\}$ 以正 z 軸為軸向自旋，角速度（angular velocity）大小為 2.5 rad/sec 。

(一)試求該圓盤上某點 $p(x, y, 2)$ 相對於原點之瞬時速度（velocity） \vec{v} 。（利用公式： $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ，其中 $\vec{\omega}$ 為圓盤角速度， \vec{r} 為 p 點之位置向量。）（5分）

(二)試求向量場 \vec{v} 之旋度（curl）。（5分）

三、求 $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的反矩陣。（10分）

四、若 $f(x) = x \sin(x)$ ， $-\pi \leq x \leq \pi$ 。

求：(一) $f(x)$ 定義於 $[-\pi, \pi]$ 的傅氏級數（Fourier series）。（10分）

(二) $\sin(x) + x \cos(x)$ 定義於 $[-\pi, \pi]$ 的傅氏級數（Fourier series）。（10分）

乙、測驗題部分：（50分）

代號：6707

- (一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 下列何者為微分方程式 $yy'' = 2(y')^2$ 的解？

- (A) $\ln(c_1x + c_2)$ (B) $(c_1x + c_2)^{-1}$ (C) e^{x+c} (D) $[\ln(cx + c_2)]^{-1}$

2 令 c 是從 $(1,1,1)$ 到 $(0,1,3)$ 的直線線段，則 $\int_c xzdx - \cos(yz)dy + xydz$ 等於多少？

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) 1

3 下列何者是微分方程式 $y' + y = x/y$ 的解，其中 c 為任意實數？

- (A) $y = x^2 - 0.5$ (B) $y^2 = ce^{-2x} + x - 0.5$ (C) $y = ce^{-2x} + x - 0.5$ (D) $y^2 = x - 0.5 + y$

（請接第二頁）

考試別：國家安全情報人員
等別：三等考試
組別：電子組（外國文選試英文）
科目：工程數學

4 下列何者矩陣是列梯型（row echelon form）？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5 下列向量場 \vec{v} 中，何者無旋量 ($\text{curl } \vec{v} = \vec{0}$)，且散度 (divergence) 最小？

(A) $\vec{v} = [x, y, z]$ (B) $\vec{v} = [-y, -x, z]$ (C) $\vec{v} = [x, -z, y]$ (D) $\vec{v} = [z, x, y]$

6 設 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ；若 $a+b=c+d$ 且 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是 \mathbf{A} 的一個特徵向量 (eigenvector)，則 \mathbf{A} 的特徵值 (eigenvalues) 為何？

(A) $\lambda_1 = a+b, \lambda_2 = d-b$ (B) $\lambda_1 = a+b, \lambda_2 = d-c$
(C) $\lambda_1 = a+b, \lambda_2 = c+d$ (D) $\lambda_1 = a+b, \lambda_2 = c-d$

7 令矩陣 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 8 & 64 \end{pmatrix}$ ，則行列式 $|\mathbf{A}|$ 等於？

(A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 48

8 令 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)^2}\right)$ ，則 $f(1)$ 等於多少？

(A) 1 (B) $1-2e^{-1}$ (C) $1-e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-2}$ (D) $1+e^{-1}$

9 設 $u(t)$ 為單位步階函數，則以下何者為此迴旋積 (convolution) $u(t-3)*e^{-2t}$ 的結果？

(A) $0.5(1-e^{-2(t-3)})u(t-3)$ (B) $0.5(1-e^{-3(t-3)})u(t-3)$
(C) $0.5(1-e^{3(t-3)})u(t-3)$ (D) $0.5(1-e^{2(t-3)})u(t-3)$

10 $f(t)$ 是週期為 2π 的函數，定義 $g(t)$ 為 $g(t) = (f(t) + f(-t))/2$ ，將 $g(t)$ 的傅立葉級數 (Fourier series) 表示成 $g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$ 。下列敘述何者正確？

(A) $a_0 = 0$ (B) $a_0 \neq 0$ (C) $a_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots$ (D) $b_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots$

11 若 $f(t)$ 的拉式轉換 (Laplace transform) 為 $F(s) = \frac{s+3}{2s^2+2s+1}$ ，則 $f(0^+) = ?$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3

(請接第三頁)

考試別：國家安全情報人員
等別：三等考試
組別：電子組（外國文選試英文）
科目：工程數學

12 下列何者為奇函數？

- (A) $f(x) = x^4$ (B) $f(x) = \cos x$ (C) $f(x) = e^x + e^{-x}$ (D) $f(x) = \tan 3x$

13 週期為 2π 的週期性函數 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ ，其傅立葉級數表示成 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ，則

下列何者正確？

- (A) $a_0 = \frac{\pi}{4}$ (B) $a_n = \frac{1}{n}$ (C) $b_n = 0$ (D) $a_0 = \frac{\pi}{2}$

14 將 $\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^{n+1}$ 化簡成單一級數表示，則下列何者正確？

- (A) $2c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((2n+1)c_{n+1} + 6c_{n-1})x^n$ (B) $2c_1 + (6c_0 + 4c_2)x + \sum_{n=2}^{\infty} (2nc_{n+1} + 6c_n)x^n$
(C) $2c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2(n+1)c_{n+1} + 6c_{n-1})x^n$ (D) $2c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((2n+1)c_n + 6c_{n-1})x^n$

15 求 $\int_C (12z^2 - 4iz) dz$ 之值，其中 C 為連結 (1,1) 與 (2,3) 之曲線，而 $y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ ：

- (A) $-150 + 30i$ (B) $-156 + 38i$ (C) $-150 + 38i$ (D) $-158 + 30i$

16 計算 $(1 + \sqrt{3}i)^{-10} = ?$

- (A) $2^{-10}(1 + \sqrt{3}i)$ (B) $2^{-10}(1 - \sqrt{3}i)$ (C) $2^{-11}(-1 + \sqrt{3}i)$ (D) $2^{-11}(-1 - \sqrt{3}i)$

17 令 $u = u(x, y)$ ， f 為任意連續二次可微分函數，下列何者滿足偏微分方程式 $u_{xy} = u_{yy}$ ？

- (A) $u = f(xy)$ (B) $u = f(x+y)$ (C) $u = f(x-y)$ (D) $u = f\left(\frac{x}{y}\right)$

18 設 x 為連續隨機變數，其機率密度函數為 $f(x) = e^{-|x|}/2$ ， $-\infty < x < \infty$ ，試求變異數 (variance)：

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

19 在某一個車站，公車到站的時間是隨意分布在上午 10 點到 10 點 50 分之間。一個乘客在上午 9 點 55 分抵達車站，則這個乘客至少還要等 20 分鐘才会有公車到站的機率為何？

- (A) 0.30 (B) 0.40 (C) 0.60 (D) 0.70

20 假設 x 、 y 是獨立隨機變數，機率密度函數各為 $f(x) = \begin{cases} 8/x^3, & x > 2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$ ， $g(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$ ，若 $z = xy$ ，則期

望值 $E(z)$ 為：

- (A) $8/2$ (B) $8/3$ (C) $8/4$ (D) $8/5$