

等 別：三等考試

組 別：數理組

科 目：機率統計

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、設 A, B 二支球隊進行 7 戰 4 勝的比賽，每場 A 勝之機率為 0.6，B 勝之機率為 0.4。令比賽所需場次為 N ， $N \in \{4, 5, 6, 7\}$ 。試求 N 之分佈及其期望值 $E(N)$ 。(16 分)

二、將 n 個球隨機放進 m 個箱子中。令 $X_i = 1$ 表示第 i 個箱子是空的，否則令 $X_i = 0$ ， $i = 1, \dots, m$ 。又令 U_m 表空箱子之總數。試求：(16 分)

(一) $E(X_i)$, $Var(X_i)$, $E(X_i X_j)$, $Cov(X_i, X_j)$, $\rho(X_i, X_j)$, $i \neq j$ 。

(二) $E(U_m)$, $Var(U_m)$ 。

三、對 $n \geq 2$ ，設隨機變數 X_n 具有 $\Gamma(n, \beta)$ 分佈，其中 $\beta > 0$ ，為一常數。即 X_n 之 p.d.f. 為

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(n) \beta^n}, \quad x > 0$$

(一) 利用適當的定理，證明 $n \rightarrow \infty$ 時， X_n/n 機率收斂至 β 。

(二) 利用適當的定理，估計 n 很大時， $P(X_n \leq x)$ 之值， $x \in R$ 。(16 分)

四、急煞車緩衝裝置（簡稱 ABS）現已成為許多車的標準配備。在早期的一項研究，曾針對當時的系統檢驗其有效性。研究中，隨機抽樣某廠牌的 500 輛未裝 ABS 的車，以及另 500 輛配有 ABS 的同型車，並查驗這些車輛在過去一年中，是否曾在高速公路上發生車禍。若有，則記錄車禍後所花費之修理費用。今利用出車禍的頻率，以及相關之修理費作為評估之準則。根據以下之數據，回答下列問題，並附適當說明。(16 分)

車種	樣本數	出車禍車數	修理費用平均值 (元)	修理費用標準差 (元)
未裝 ABS 車輛	500	42	62250	20130
配備 ABS 車輛	500	38	51420	18750

(一) 試問裝置 ABS 對降低車禍頻率是否有效？

(二) 試問裝置 ABS 對降低車禍後之修理費用是否有效？

(三) 試給出二類型車在車禍後之修理費用之差距期望值之 95% 信賴區間。

(請接背面)

等 別：三等考試
組 別：數理組
科 目：機率統計

五、某犯罪學研究學者有興趣瞭解，季節因素是否會影響到犯罪發生率。以下為一針對1361件兇殺案，根據季節所做發生件數分類的數據。

春季	夏季	秋季	冬季
334	372	327	328

試利用 χ^2 檢定，在顯著水準 $\alpha = 0.01$ 下，檢定四季之發生率是否為一致。(16分)

六、黏土磚塊重量的變異對建築物的結構、通風、隔音、隔熱等之設計非常重要。以下為在一實驗中，由一組黏土磚塊之灰泥隨機樣本所得，有關灰泥乾燥密度(y)與灰泥空氣含量(x)之15筆相關數據 $(x_i, y_i), i=1, \dots, 15$ ，其中

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 218.1, \sum_{i=1}^{15} y_i = 1693.6, \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 3577.01,$$

$$\sum_{i=1}^{15} x_i y_i = 24,252.34, \sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 191,672.90$$

(一)試給出描述 x, y 間之最小平方迴歸直線估計 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ 。

(二)試求 x, y 間之相關係數之估計 r 。

(三)試求 x, y 間之迴歸直線斜率 β_1 之95%信賴區間，並說明灰泥空氣含量與灰泥乾燥密度是否相關。(20分)

t_ν -分佈與 χ_ν^2 -分佈之機率值

$t_\nu(\alpha)$					$\chi_\nu^2(\alpha)$					
α					α					
ν	.10	.05	.025	.01	ν	.10	.05	.025	.01	.005
10	1.372	1.812	2.228	2.764	1	2.706	3.843	5.025	6.637	7.882
11	1.363	1.796	2.201	2.718	2	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3	6.251	7.815	9.348	11.344	12.837
13	1.350	1.771	2.160	2.650	4	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
14	1.345	1.761	2.145	2.624	5	9.236	11.070	12.832	15.085	16.748