代號：35530
頁次：4－1

# 114年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員、國家安全局國家安全情報人員、移民行政人員考試及114年特種考試退除役軍人轉任公務人員考試試題

考　試　別：國家安全情報人員考試
等　　　別：三等考試
類科組別：電子組（選試英文）
科　　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、試求常微分方程式 $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=3x^{-2}$ 之通解。（10 分）

二、試以拉普拉斯轉換法（Laplace Transform）求解下列具初值條件之聯立常微分方程式 $\begin{bmatrix}\dfrac{dy_1(t)}{dt}\\ \dfrac{dy_2(t)}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6t-t^2\\ -1+t-t^2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$ 之特解。（10 分）

三、$\boldsymbol{Y}$ 為二階方形矩陣與 $\boldsymbol{I}_2$ 為二階單位矩陣，試求矩陣方程式 $\boldsymbol{Y}^2-6\boldsymbol{Y}+9\boldsymbol{I}_2=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ 之矩陣 $\boldsymbol{Y}$ 解。（10 分）

四、試以剩值定理（Residue Theorem）求 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{\sqrt{3}-\cos\theta}$ 之值。（10 分）

五、$X$ 為一隨機變數（Random variable），其機率密度函數（probability density function）為 $p(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma^2}}$，$\mu_x\in R$，$\sigma>0$，$-\infty<x<\infty$。試求其期望值（Expected value），$E\{X^2+4X+2\}$。（10 分）

乙、測驗題部分：（50 分） 代號：3355

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 設 $3\times3$ 矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&8\\3&8&14\end{bmatrix}$，若 $b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，問系統 $Ax=b$ 有幾組解？

(A)唯一解 (B)無解 (C)無限多解 (D)解空間維度為 2

2 由三個向量 $\left\{v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\\-2\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ 所展開（span）的向量空間，其維度（dimension）為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3 關於矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ 的描述，下列何者正確？

(A) $A$ 的秩數（rank）為 2 (B) 0 為 $A$ 的特徵值

(C) $A$ 為可逆（invertible）矩陣 (D) $A$ 為正定（positive definite）矩陣

4 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-3&-3\end{bmatrix}$，則特徵多項式為何？

(A) $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1$ (B) $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1$ (C) $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1$ (D) $\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1$

5 下列那個向量屬於矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&-1&-2\\7&-2&-1\end{bmatrix}$ 的零空間（null space）？

(A) $\begin{bmatrix}1&2&-1\end{bmatrix}^T$ (B) $\begin{bmatrix}1&2&0\end{bmatrix}^T$ (C) $\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}^T$ (D) $\begin{bmatrix}1&4&-1\end{bmatrix}^T$

6 下列關於二次型（quadratic form）$Q(x_1, x_2)=4x_1^2+12x_1x_2+9x_2^2$ 的性質，何者正確？

(A) $Q$ 為正定（positive definite） (B) $Q$ 為負定（negative definite）

(C) $Q$ 為半正定（positive semi-definite） (D) $Q$ 為半負定（negative semi-definite）

7 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & k\end{bmatrix}$，若 $\det(A^T A)=196$，則 $k=$？

(A) 7 (B) 14 (C) 2 (D) 1

8 矩陣 $A=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，請求 $A^{20}=$？

(A) $\begin{bmatrix}0 & 3^{20}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}3^{20} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}3^{10} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}3^{10} & 0\\ 0 & 3^{10}\end{bmatrix}$

9 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow B=\int_0^1 e^{At}dt$，則 $\mathrm{trace}(B)=$？

(A) $\dfrac{e^2-1}{2}+\dfrac{e^3-1}{3}+\dfrac{e^4-1}{4}$ (B) $\dfrac{e^2+e^3+e^4-3}{3}$

(C) $\dfrac{e^9-1}{9}$ (D) $\ln(e^2+e^3+e^4)$

10 下列那一個複變函數是「可解析的（analytic）函數」？

(A) $y+ix$ (B) $x^2+y^2+2ixy$ (C) $e^x\cos y+ie^x\sin y$ (D) $e^y\cos x+ie^y\sin x$

11 設 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)}$，則其在 $|z|<1$ 的羅倫級數（Laurent series）展開式前兩項為？

(A) $\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}$ (B) $\dfrac{1}{z^2}+1$ (C) $\dfrac{1}{z^2}+z$ (D) $\dfrac{1}{z^2}+z^2$

12 考慮複變函數 $f(z)=\tan z$，請求 $f(z)$ 在 $z_0=\pi/2$ 的餘數（residue），$\underset{z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z)=$？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $-1$

13 求微分方程式 $(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(2xy+\cos x)\mathrm{d}x=0$ 之解？

(A) $xy^2+\sin x+\dfrac{1}{3}y^3=c$ (B) $x^2y-\sin x+\dfrac{1}{3}x^3=c$ (C) $xy^2+\sin x+\dfrac{1}{3}x^3=c$ (D) $x^2y+\sin x+\dfrac{1}{3}y^3=c$

14 關於常微分方程式 $\dfrac{d^4y}{dx^4}+\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ 的特徵方程式與特徵根，下列何者正確？

(A)特徵方程式為 $\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda=0$ (B) $\lambda=0$ 為其中一個特徵根

(C) $\lambda=-1$ 為其中一個特徵根 (D) $\lambda=1$ 為其中一個特徵根

15 考慮常微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+5y=0$ ，下列何者非其齊次解（homogeneous solution）？

(A) $e^{2x}\cos x$ (B) $e^{2x}\sin x$ (C) $e^{2x}(\cos x+2\sin x)$ (D) $e^{2x}\cos x\sin x$

16 考慮原始函數 $f(x)=3x+2$ ，及其衍生之傅立葉級數（Fourier series）函數

$f_1(x)=f(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 區間之傅立葉級數（Fourier series）

$f_2(x)=f(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 區間之傅立葉正弦級數（Fourier sine series）

$f_3(x)=f(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 區間之傅立葉餘弦級數（Fourier cosine series）

(A) $f_1(0)=f_2(0)$ (B) $f_1(0)=f_3(0)$ (C) $f_1(1)=f_2(1)$ (D) $f_1(0.5)=f_3(0.5)$

17 考慮一偏微分方程式 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ; $x\in[0,1]$ ， $t\geq 0$ 。則下列何者不是齊次邊界條件（homogeneous boundary condition）？

(A) $u(0,t)=0$ ， $\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}=0$

(B) $u(0,t)+u(1,t)=0$ ， $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}=0$

(C) $u(0,t)=\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$ ， $u(1,t)=\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}$

(D) $u(0,t)+\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0$ ， $u(1,t)=0$

18 設 $\mathcal{F}\{f(t)\}=F(w)$ 為 $f(t)$ 的傅立葉轉換（Fourier transform），求 $\mathcal{F}\{2f(t)\cdot i\sin 2t\}$= ？ $(i=\sqrt{-1})$

(A) $\frac{1}{2}F(w-2)-\frac{1}{2}F(w+2)$

(B) $F(w-2)-F(w+2)$

(C) $2F(w-2)+2F(w+2)$

(D) $F(w-2)+F(w+2)$

19 一工廠生產 60%正常品，40%瑕疵品。品檢員判定正確率為 90%，誤判率為 20%。隨機取出一件產品，判定為「正常」，則實際正常的機率為何？

(A) $\frac{27}{31}$ (B) $\frac{18}{37}$ (C) $\frac{9}{10}$ (D) $\frac{9}{13}$

20 有三個獨立且相同分布（independent, identically distributed, i.i.d.）之隨機變數 $\{X_1,X_2,X_3\}$ ，皆為常態分布（normal distribution），期望值為 $\mu_x$ ，標準差為 $\sigma_x$ 。令 $Y=\frac{X_1+X_2}{2}$ ，其期望值為 $\mu_y$ ，標準差為 $\sigma_y$ ； $Z=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ ，其期望值為 $\mu_z$ ，標準差為 $\sigma_z$ 。下列何者正確？

(A) $\mu_x>\mu_y>\mu_z$ (B) $\mu_x<\mu_y<\mu_z$ (C) $\sigma_x>\sigma_y>\sigma_z$ (D) $\sigma_x<\sigma_y<\sigma_z$