

考試別：鐵路人員考試、國家安全情報人員考試

等別：高員三級考試、三等考試

類科組別：電力工程、電子組（選試英文）

科目：工程數學

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、求微分方程式 (Differential Equations)： $\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 9y(x) = 9xe^{-3x}$  之通解 (general solution)。(15分)

二、矩陣 (matrix)  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ ：(每小題5分，共15分)

(一)求矩陣 (matrix)  $A$  之特徵值 (eigenvalues) 與特徵向量 (eigenvectors)。

(二)求矩陣函數  $e^{At}$ 。

(三)求系統方程式 (system equations)  $\frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + 2x_2(t)$  之通解  $\frac{dx_2(t)}{dt} = -3x_2(t)$

(general solution)。

三、擲四枚硬幣 (Flip four coins)，試驗結果有 16 種結果 (outcomes)： $o_1, o_2, \dots, o_{16}$ ，其中  $o_1 = HHHH$ ， $o_2 = HTHH$ ， $\dots$ ， $o_{16} = TTTT$ ；若定義隨機變數 (random variable)  $X$  為： $X(o_j) =$  出現背面 (T) 的硬幣數目，例如： $X(o_1) = 0$ ， $X(o_2) = 1$ ； $P$  為隨機變數  $X$  之機率分布 (probability distribution)，例如： $P(0) = 1/16$ ， $P(1) = 4/16$ 。(每小題5分，共10分)

(一)求此隨機變數  $X$  之均值 (mean) 或期望值 (expected value)： $\mu_X$ 。

(二)求此隨機變數  $X$  之標準差 (standard deviation) 或變異數的開根號 (square root of the variance)： $\sigma_X$ 。

四、複數函數  $f(z) = \frac{ze^z}{(z-1)(z+1)}$ ：(每小題 5 分，共 10 分)

(一)求  $f(z)$  在  $z=1$  與  $z=-1$  的留數 (residue)。

(二)閉合曲線 (closed curve)  $C$  為圓  $|z|=2$ ；利用柯西 (Cauchy) 留數定理

(Residue Theorem) 求複數線積分  $\oint_C \frac{ze^z}{(z-1)(z+1)} dz$ 。

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：7704 6357

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 某能量場可用函數  $\varphi(x, y, z) = 0.5(x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2)$  表示。該能量場在點  $P(-1, 0, 1)$  的最大變化率 (rate of change) 為何？

- (A)  $-\sqrt{3}$                       (B)  $-\sqrt{2}$                       (C)  $\sqrt{2}$                       (D)  $\sqrt{3}$

2 令矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ ，則下列選項中何者為矩陣  $A$  的秩數 (rank)？

- (A) 4                      (B) 3                      (C) 2                      (D) 1

3 考慮聯立方程組  $Ax = 0$ ，其中  $A \in R^{8 \times 10}$ 。若此方程組的通解含有 6 個任意常數，則  $A$  的值域空間 (range space) 維度 (dimension) 為何？

- (A) 8                      (B) 6                      (C) 4                      (D) 3

4 給定兩向量  $u = [1 \ 1 \ 2]^T$  及  $v = [2 \ -1 \ 1]^T$ ，下列選項何者錯誤？

- (A) 此兩向量的範數 (norm) 乘積為 6  
(B) 此兩向量的內積 (inner product) 為 3  
(C) 此兩向量的外積 (cross product) 為  $[-3 \ -3 \ 3]^T$   
(D) 此兩向量的夾角為  $\frac{\pi}{3}$

5  $T$  為  $R^2$  到  $R^3$  的線性轉換，且滿足  $T(u+4v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $T(2u+3v) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 。則  $T(u) = ?$

- (A)  $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 12 \end{bmatrix}$                       (B)  $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$                       (C)  $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$                       (D)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 12 \end{bmatrix}$

6 若  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  存在可逆矩陣  $P$  可將其對角化為  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。則  $P$  的第一行行向量為

何？

- (A)  $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$                       (B)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$                       (C)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$                       (D)  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- 7 令矩陣  $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，則  $A^2$  的特徵值 (eigenvalues) 不是下列那一個選項？
- (A) 9 (B) 1 (C) 16 (D) 4
- 8 下列矩陣何者是不可被「對角線化 (diagonalizable)」？
- (A)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- 9 考慮微分方程式  $\frac{dy}{dx} = a(x)b(y), a(x)b(y) \neq 0$ 。若乘上積分因子  $\mu(x, y)$  後可將此方程式轉換成正合 (exact) 微分方程式，則  $\mu$  為下列何者？
- (A)  $\mu = a(x)$  (B)  $\mu = \frac{1}{a(x)}$  (C)  $\mu = -b(y)$  (D)  $\mu = \frac{1}{b(y)}$
- 10 考慮微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} + \sin(x)y = 1 - x^3, y(0) = 1, \frac{dy}{dx}(0) = 0$ 。若此方程式的級數解可表示為  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ，則  $c_3$  為何？
- (A)  $c_3 = -\frac{1}{3}$  (B)  $c_3 = -\frac{1}{6}$  (C)  $c_3 = \frac{1}{6}$  (D)  $c_3 = \frac{1}{3}$
- 11 函數  $f(t)$  之拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 為  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ，令  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(s+1)^2}$ ，則下列何者正確？
- (A)  $f(t) = te^{-t} - e^{-t} + 1$  (B)  $f(t) = -te^{-t} + e^{-t} + 1$   
(C)  $f(t) = -te^{-t} - e^{-t} - 1$  (D)  $f(t) = -te^{-t} - e^{-t} + 1$
- 12 函數  $f(t) = 2\cos(3t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ ，若在  $t = 0$  處， $f(t)$  的傅立葉餘弦級數 (Fourier cosine series) 收斂到  $A$ ，傅立葉正弦級數 (Fourier sine series) 收斂到  $B$ ；在  $t = \frac{\pi}{3}$  處， $f(t)$  的傅立葉餘弦級數 (Fourier cosine series) 收斂到  $C$ ，傅立葉正弦級數 (Fourier sine series) 收斂到  $D$ 。則  $A, B, C, D$  各值為何？
- (A)  $A = 0, B = 0, C = 0, D = 0$  (B)  $A = 2, B = 0, C = -2, D = 0$   
(C)  $A = 0, B = 2, C = -2, D = 0$  (D)  $A = 2, B = 0, C = 2, D = 0$
- 13 已知函數  $f(t) = \frac{1}{a}e^{-a|t|}, a > 0$ ，則下列何者為函數  $f(t)$  的傅立葉轉換 (Fourier transform) ( $i = \sqrt{-1}$ )？
- (A)  $\frac{-2i\omega}{a(a^2 + \omega^2)}$  (B)  $\frac{2i\omega}{a(a^2 + \omega^2)}$  (C)  $\frac{-2}{a^2 + \omega^2}$  (D)  $\frac{2}{a^2 + \omega^2}$
- 14 考慮複變函數  $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ ，其中  $z = x + iy$ 。則  $\frac{df(z)}{dz}$  為何？
- (A)  $\frac{df(z)}{dz} = (-6xy) + i(3x^2 - 3y^2)$  (B)  $\frac{df(z)}{dz} = (3x^2 - 3y^2) + i(6xy)$   
(C)  $\frac{df(z)}{dz} = (3x^2 - 3y^2) + i(3x^2 - 3y^2)$  (D)  $f(z)$  不可以微分
- 15 考慮複變函數 (complex function)  $f(z) = \frac{z+1}{z^2 - 2z + 5}$ ，若  $C$  為逆時鐘繞圓周  $|z - 1 - i| = 2$  的路徑，且積分  $\oint_C f(z)dz = a + bi$ ，則下列選項何者正確？
- (A)  $a = \frac{\pi}{2}$  (B)  $a = \pi$  (C)  $b = -\frac{\pi}{2}$  (D)  $b = -\pi$

- 16 給定複變數函數  $f(z) = \frac{2}{(z-1)(z-3)}$ ，針對區域  $1 < |z| < 3$  對函數  $f(z)$  展開可得  $f(z) = \cdots + az^{-1} + b + cz + dz^2 + \cdots$ ，則下列選項何者正確？  
 (A)  $a = -\frac{1}{3}$  (B)  $b = -\frac{1}{3}$  (C)  $c = -\frac{1}{3}$  (D)  $d = -\frac{1}{3}$
- 17 某元件使用壽命  $X$ （單位：小時），其機率密度函數（probability density function）為  $f(x) = 0.005e^{kx}, x \geq 0$ 。則  $k$  值及元件平均使用壽命為何？  
 (A)  $k = 0.005$ ，平均使用壽命 200 小時 (B)  $k = 0.005$ ，平均使用壽命  $\infty$  小時  
 (C)  $k = -0.005$ ，平均使用壽命 200 小時 (D)  $k = -0.005$ ，平均使用壽命  $\infty$  小時
- 18 某雜訊的機率密度函數（probability density function）為  $[-1, 3]$  的均勻分佈，其變異數（variance）為  $A$ 。經過增益為 5 的放大器放大以後，其變異數為  $B$ 。則  $A, B$  各值為何？  
 (A)  $A = \frac{4}{3}, B = \frac{20}{3}$  (B)  $A = \frac{4}{3}, B = \frac{100}{3}$  (C)  $A = \frac{16}{3}, B = \frac{80}{3}$  (D)  $A = \frac{16}{3}, B = \frac{400}{3}$
- 19 令隨機變數  $X, Y$  的聯合機率密度函數（Joint probability density function）為  $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kx(1+2y), & 0 \leq x \leq 2, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，其中  $k$  為實數，則下列何者正確？  
 (A)  $k = \frac{1}{2}$   
 (B) 邊際機率密度（Marginal probability density function）為  $g(x) = \frac{x}{4}, 0 \leq x \leq 2$   
 (C) 邊際機率密度（Marginal probability density function）為  $h(y) = \frac{1+2y}{4}, 0 < y < 1$   
 (D) 條件機率密度（conditional probability density function）為  $f(y|x) = \frac{1+2y}{2}, 0 < y < 1$
- 20 給定兩向量  $u = [2 \ -1 \ 3]^T$  及  $v = [4 \ -1 \ 2]^T$ ，分解  $u$  為  $u_1 + u_2$ ，其中  $u_1$  為  $u$  在  $v$  的垂直投影（orthogonal projection），則下列選項何者錯誤？  
 (A) 向量  $u_1 = \left[ \frac{20}{7} \ -\frac{5}{7} \ \frac{10}{7} \right]^T$   
 (B) 向量  $u_2$  的範數（norm） $\|u_2\| = \frac{\sqrt{161}}{7}$   
 (C) 兩向量  $u_2, v$  的外積（cross product）為零向量  
 (D) 兩向量  $u_1, u_2$  的內積（inner product）為零