代號：60460
頁次：4－1

108年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

考 試 別：國家安全情報人員
等　　別：三等考試
類 科 組：電子組
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）
㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、求取下列微分方程式之特徵值（eigen-value）λ 及特徵函數（eigen-function）。（15分）

$$\left(e^{-2x}y'\right)' + (1+\lambda)e^{-2x}y = 0; \quad y(0) = y(1) = 0$$ 。

二、證明下列波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{for} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$y(x,0) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{for} \quad -\infty < x < \infty$$ 。

之解答可表示為

$$y(x,t) = \int_0^\infty \left[a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \sin(\omega x)\right]\sin(\omega t)\,d\omega$$ ，

其中

$$a_\omega = \frac{1}{\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\cos(\omega\xi)\,d\xi \quad \text{and} \quad b_\omega = \frac{1}{\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\sin(\omega\xi)\,d\xi$$ 。（20分）

三、求取下列矩陣之反矩陣。（15分）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \\ 2 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

乙、測驗題部分：（50 分）　　代號：6604

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 已知 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為向量空間（vector space）V 中的向量，下列何者正確？

(A) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{u})=\mathbf{0}$　(B) $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|<\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$　(C) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$　(D) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$

2 下列何者是 R^3 之子空間（subspace）？

(A) $W=\{(x_1,x_2,1):x_1,x_2\in R\}$　(B) $W=\{(x_1,x_2,x_1x_2):x_1,x_2\in R\}$

(C) $W=\{(x_1,1/x_2,x_2):x_1,x_2\in R\}$　(D) $W=\{(x_1,x_2,x_1-2x_2):x_1,x_2\in R\}$

3 若 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=5$，求 $\mathrm{C}=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ c_1-3b_1 & c_2-3b_2 & c_3-3b_3 \end{vmatrix}$？

(A) $\mathrm{C}=15$　(B) $\mathrm{C}=5$　(C) $\mathrm{C}=-5$　(D) $\mathrm{C}=-15$

4 令矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$，試問 A 的零空間（null space）之維度（dimension）為何？

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

5 設 $L:R^3\to R^3$ 為一線性轉換，已知 $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 與 $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，求 $L\left(\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$ 為何？

(A) $[2\quad 1\quad 5]^T$　(B) $[2\quad 7\quad 4]^T$　(C) $[2\quad -1\quad 5]^T$　(D) $[-2\quad 4\quad -7]^T$

6 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 3 & -13 \end{bmatrix}$。下列何者是 A 的特徵向量？

(A) $[4\quad -15\quad -6]^T$　(B) $[7\quad -24\quad 5]^T$　(C) $[4\quad -15\quad 5]^T$　(D) $[7\quad -24\quad -6]^T$

7 試問下列何者複數函數其極限值不存在？

(A) $\lim\limits_{z\to i} z\mathrm{Arg}(z)$　(B) $\lim\limits_{z\to -1}[\mathrm{Arg}(z)]^2$　(C) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{|z|}$　(D) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{|z|^2}{z}$

8 下列何者不是複數函數 $z^3 = i$ 的根？

(A) $-i$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ (D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

9 求 $\int_{|z|=2}\dfrac{z^3+2z-5}{z-1}dz=$ ？

(A) $4\pi i$ (B) $-2\pi i$ (C) $2\pi i$ (D) $-4\pi i$

10 試求微分方程式 $y'''+3y''-y'-3y=0$ 之解，選項中 k_1,k_2,k_3 為任意實數：

(A) $y=k_1e^{-3t}+k_2e^{-t}+k_3e^{t}$ (B) $y=k_1e^{3t}+k_2e^{-t}+k_3e^{t}$

(C) $y=k_1e^{-3t}+k_2e^{-t}+k_3e^{3t}$ (D) $y=k_1e^{3t}+k_2e^{-2t}+k_3e^{2t}$

11 z 為複數，$|z-3+7i|=4$ 在複數平面解的集合圖形為何？

(A)一個點 (B)一條直線 (C)一個圓 (D)空集合

12 求微分方程式 $y''+0.5y'-0.5y=e^{x}+\sin(x)+3\cos(x),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.5$ 之解，其中 $y'=\dfrac{dy}{dx},\quad y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ：

(A) $y=e^{x/2}+e^{x}-2\cos(x)$ (B) $y=3e^{x/2}-3\cos(x)$

(C) $y=e^{-x}\cos(x)-1$ (D) $y=e^{x/2}-e^{x}+2\sin(x)$

13 下列何者為函數 $f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\le t\le 2\pi\\ 2+\cos t, & t\ge 2\pi\end{cases}$ 之拉普拉斯轉換（Laplace Transform）？

(A) $\left(\dfrac{2}{s}+\dfrac{s-1}{s^2+1}\right)e^{-2\pi s}$ (B) $\dfrac{2}{s}+\dfrac{s-1}{s^2+1}+\dfrac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}$

(C) $\dfrac{1}{s^2+1}+\left(\dfrac{2}{s}+\dfrac{s-1}{s^2+1}\right)e^{-2\pi s}$ (D) $\dfrac{2}{s}+\dfrac{s-1}{s^2+1}e^{-2\pi s}$

14 令 $f(x)=x-ix^2,\quad 1\le x\le 2$ ，則 $\int_1^2 f(x)dx=$ ？

(A) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{3}i$ (B) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{3}i$ (C) $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{3}i$ (D) $-\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{3}i$

15 若 $y(x)=a-x^2-\frac{x^4}{3}-\frac{x^6}{5}-\frac{x^8}{7}-\ldots$ 為方程式 $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$ 的解，其中 $y'=\frac{dy}{dx},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}$，試問 a 值為何？

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 4

16 設 $f(t)=\sin(2t)$，求 $\int_0^t f(\tau)d\tau$ 之拉普拉斯轉換？

(A) $\frac{2}{s^2\left(s^2+4\right)}$　(B) $\frac{2}{s\left(s^2+2\right)}$　(C) $\frac{2}{\left(s^2+4\right)}$　(D) $\frac{2}{s\left(s^2+4\right)}$

17 函數 $f(x)=x^2,\ -\pi<x<\pi$ 的傅立葉級數為 $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$，求 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=$？

(A) $\frac{\pi^2}{8}$　(B) $\frac{\pi^2}{6}$　(C) $\frac{\pi^2}{4}$　(D) $\frac{\pi^2}{2}$

18 設一連續隨機變數 X 具有機率密度函數 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求其變異數（variance）？

(A) 1/18　(B) 1/36　(C) 3/18　(D) 5/36

19 設一隨機變數 X 具有機率密度函數 $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；試問一個隨機變數 $Y=X^2$，其機率密度函數 $g(y)$ 為何？

(A) $g(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}-1,\quad 0<y<1$　(B) $g(y)=1+\frac{1}{\sqrt{y}},\quad 0<y<1$

(C) $g(y)=2\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-1\right),\quad 0<y<1$　(D) $g(y)=\frac{2}{\sqrt{y}}+1,\quad 0<y<1$

20 設隨機變數（random variable）X 和 Y 的聯合機率密度函數（joint probability density function）為 $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}x(y+1.5), & 0<x<1 \text{ and } 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。則期望值 $E[XY]$ 為何？

(A) 1/9　(B) 17/24　(C) 13/36　(D) 13/24